

# Ajuste de la propagación del COVID-19 en México a la función de Gompertz

J. Manzanares-Martinez

*Departamento de Investigacion en Fisica, Universidad de Sonora,  
Blvd. Luis Encinas y Rosales, Hermosillo, Sonora 83000, Mexico*

(Dated: May 4, 2020)

## Abstract

A la fecha del 4 de mayo del 2020, en México existen 23,471 casos confirmados de COVID-19 y el número de casos aumenta rápidamente. Asumiendo que la propagación de la enfermedad se desarrollará como una función de Gompertz, en este trabajo presentamos un ajuste empírico de datos públicamente disponibles para realizar una proyección de la evolución de la enfermedad. Nuestro análisis predice que el máximo número de casos diarios sera de aproximadamente 2,200 para el dia 3 de junio del 2020. El límite asintótico de la curva de Gompertz proyecta un máximo numero de contagios confirmados de aproximadamente 220,000 para el mes de octubre.

PACS numbers:

## I. INTRODUCCIÓN

El nuevo coronavirus conocido como COVID-19 se ha dispersado rápidamente por todo el planeta desde que fue confirmado el primer caso el día 8 de diciembre del 2019.[1] La experiencia indica que este virus tiene una alta tasa de infección por medio del contacto humano tradicional. Debido a que no existe una vacuna, el único medio efectivo para controlar el proceso de expansión de la enfermedad es utilizar rigurosas medidas preventivas de distanciamiento social.

A pesar de que la mayoría de las universidades y centros de investigación a nivel mundial pueden estar cerrados por la pandemia, la investigación sobre el COVID-19 sigue desarrollándose gracias al esfuerzo de la comunidad científica. Por ejemplo, desde el día 6 de noviembre, en el sitio de internet de la Ref. [2] se han publicado 740 artículos en donde el COVID-19 tiene alguna relación con matemáticas, física o ciencias de la computación. En particular, en esa base de datos ya existen tres publicaciones sobre la propagación del COVID-19 en México.[3–5]

Muchos de los artículos en la Ref. [2] se dedican a realizar pronósticos sobre la evolución del coronavirus en diferentes países. La mayoría de estos artículos se basan en estudios relacionados con el método Susceptible-Infectado-Recuperado (SIR) o alguna de sus variantes. Una revisión de los trabajos relacionados con la optimización de la técnica SIR sobre las publicaciones realizadas en los últimos 100 días fue publicada el 30 de abril por E. Kaxiras *et al.*[6]

En la Ref. [2] existe otro grupo de artículos que basan su proyección temporal en la consideración de que la curva de crecimiento de la epidemia del COVID-19 se comporta, de una forma macroscópica, igual que otras leyes de crecimiento biológico que ocurren en la naturaleza. Una de estas leyes macroscópicas de crecimiento es la función de Gompertz.[7] Esta función fue desarrollada por el matemático Benjamin Gompertz y fue originalmente usada para describir la mortalidad humana para una compañía de seguros en Inglaterra. Desde entonces la curva de Gompertz ha sido usada para describir fenómenos en muy diversas áreas, como por ejemplo el crecimiento de bacterias en biología,[8] la descripción de procesos estocásticos en física,[9] la evolución de mercados financieros en economía,[10], entre otras aplicaciones.

Debido a la localización espacial de la población en condiciones de cuarentena, podemos

esperar que la dispersión de la enfermedad evolucione hacia una curva de Gompertz, como sucedió en Hubei (China). En las Refs. [11–18] se reportan distintos ejemplos en donde se han realizado estudios para ajustar la evolución en curso de la pandemia del COVID-19 a la función de Gompertz. En estos trabajos se han analizado diferentes países, pero no se ha analizado el caso de México. En este trabajo hemos desarrollado una forma empírica para ajustar la función de Gompertz a datos públicamente disponibles.[19] Nuestro análisis coincide cualitativamente con el ajuste realizado a la función avanzada de Gompertz realizada por el ELM Laboratory. [20]

## II. TEORÍA

Para este trabajo partimos de la siguiente hipótesis: *”la dispersión del COVID-19 en México se ajusta a una función de Gompertz.”* Consideramos la función de Gompertz como una curva empírica de la forma [21]

$$c(t) = \alpha \exp [-\beta \exp (-\gamma t)]. \quad (1)$$

En esta ecuación el número de casos confirmados por COVID-19 como una función del tiempo  $t$  es  $c(t)$ . Las variables  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son tres parámetros desconocidos que se van a ajustar a los datos experimentales. La primer derivada de  $c(t)$  define el *número de casos por día* y tiene la forma

$$\frac{d}{dt}c(t) = c(t)\beta\gamma \exp(-\gamma t) \quad (2)$$

La razón de cambio del numero de casos por dia se encuentra a partir de la segunda derivada, esta cantidad se escribe como

$$\frac{d^2}{dt^2}c(t) = \beta\gamma^2 c(t) \exp(-\gamma t)[-1 + \beta \exp(-\gamma t)] \quad (3)$$

Definimos al día en que la segunda derivada es cero como  $t_{max}$ , de esta manera se obtiene la siguiente relación

$$\beta = e^{\gamma t_{max}} \quad (4)$$

Este valor de  $\beta$  nos permite escribir el numero de casos confirmados de la ec. (1) de la forma

$$c(t) = \alpha \exp [-e^{-\gamma(t-t_{max})}] \quad (5)$$

Para identificar la constante  $\alpha$  tomamos el límite asintótico cuando  $t \rightarrow \infty$  para obtener

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \alpha = c_\infty \quad (6)$$

De esta forma podemos escribir el numero de casos confirmados como

$$c(t) = c_\infty \exp \{-\exp [-\gamma(t - t_{max})]\} \quad (7)$$

La ec. (7) tiene tres variables indeterminadas ( $c_\infty, t_{max}, \gamma$ ), de la misma forma, la ec. (1) tiene tres parámetros indeterminados ( $\alpha, \beta, \gamma$ ). La ventaja de este cambio de representación para  $c(t)$  radica en que la ec. (7) se ajusta mas claramente a los datos experimentales *en curso*. Asumiendo los cambios de variable descritos anteriormente, la expresión para el número de casos por dia es

$$\frac{d}{dt}c(t) = \gamma c(t) \exp[-\gamma(t - t_{max})] \quad (8)$$

### III. RESULTADOS NUMÉRICOS

El problema consiste en encontrar, por algun método numérico, la terna de parámetros ( $c_\infty, \gamma, t_{max}$ ) que mejor se ajuste a los resultados experimentales. En la literatura existen diferentes estrategias para ajustar datos experimentales a una funcion de Gompertz. Sin embargo, gran parte de estas técnicas gozan de la ventaja de tener un registro histórico del proceso, es decir, se analiza el caso cuando el fenomeno ya terminó.[8, 22] Evidentemente, ese tipo de métodos no podemos aplicarlos en nuestro caso, ya que nuestro problema a estudiar es una situación *en curso* de evolución.

Catorina *et al.* propusieron un método para ajustar una función de Gompertz a la evolución en curso del COVID-19 en Italia en la Ref. [11] Sin embargo, esta estrategia se basa en la determinación de la tasa de crecimiento ( $\gamma$ ) a partir de los datos iniciales. El problema radica en que los datos iniciales son particularmente imprecisos para el caso de

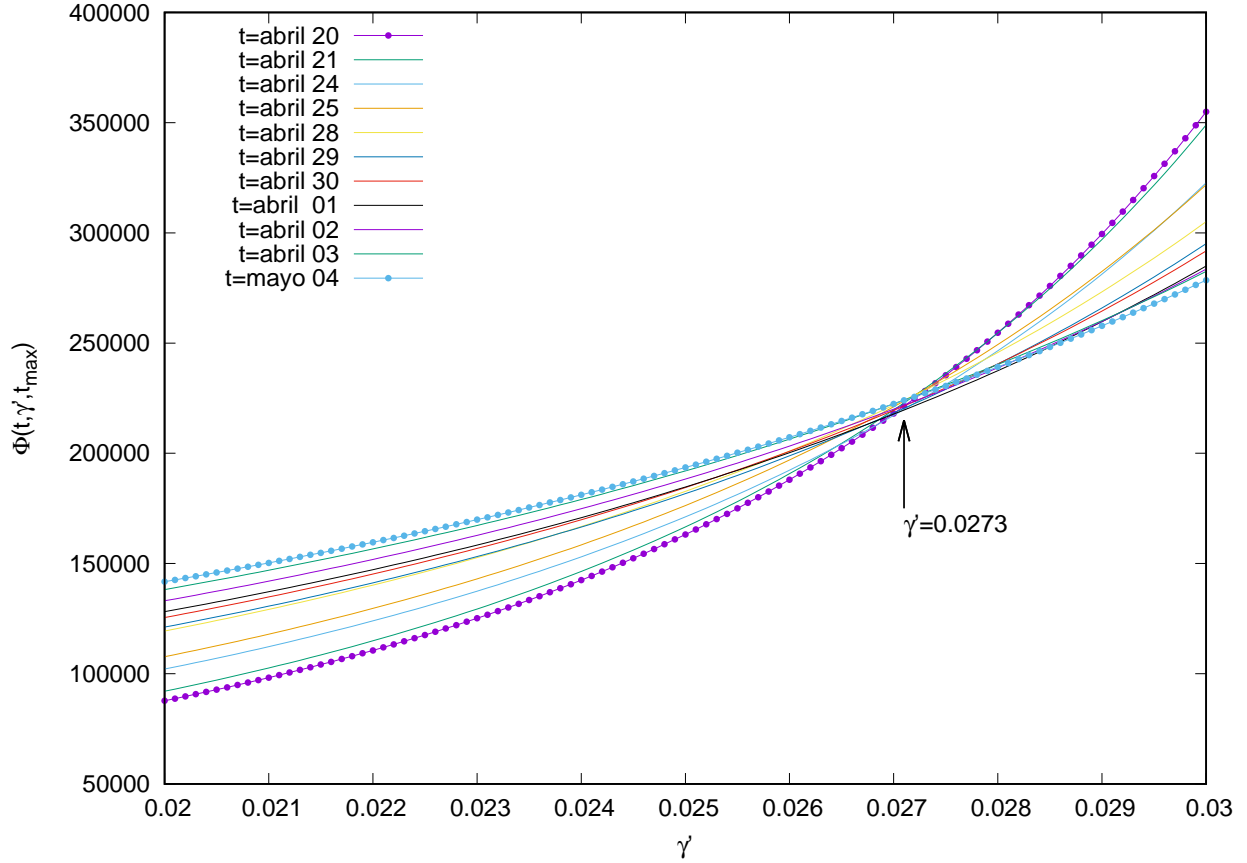


FIG. 1: Cambio de la función de prueba  $\Phi(t, \gamma', t'_{max})$  en función de la variable  $\gamma'$  considerando  $t_{max}$  como el 3 de junio. Se observa que para  $\gamma' = 0.0273$  existe un nodo de la función de prueba.

México y muy difícilmente se puede obtener una  $\gamma$  representativa para todo el proceso de esta manera. En la Ref. [18] M. A. Villalobos-Arias encontró un excelente ajuste para la evolución del COVID-19 para Costa-Rica utilizando un algoritmo de optimización no lineal. Esa metodología puede ser usada para encontrar un ajuste a la función de Gompertz para el caso de México.

En este trabajo reportamos un método empírico de ajuste de parámetros que describimos a continuación. Consideremos que la ec. (7) puede ser escrita de la forma

$$c_{\infty} \simeq \Phi(t, \gamma, t_{max}), \quad (9)$$

donde  $c_{\infty}$  se escribe en términos de una *función de prueba* que definimos como

$$\Phi(t, \gamma', t'_{max}) = c(t) \exp \{ \exp [-\gamma' (t - t'_{max})] \} \quad (10)$$

En el lado derecho de esta ecuación tenemos los datos experimentales  $c(t)$  para cada día  $t$ .

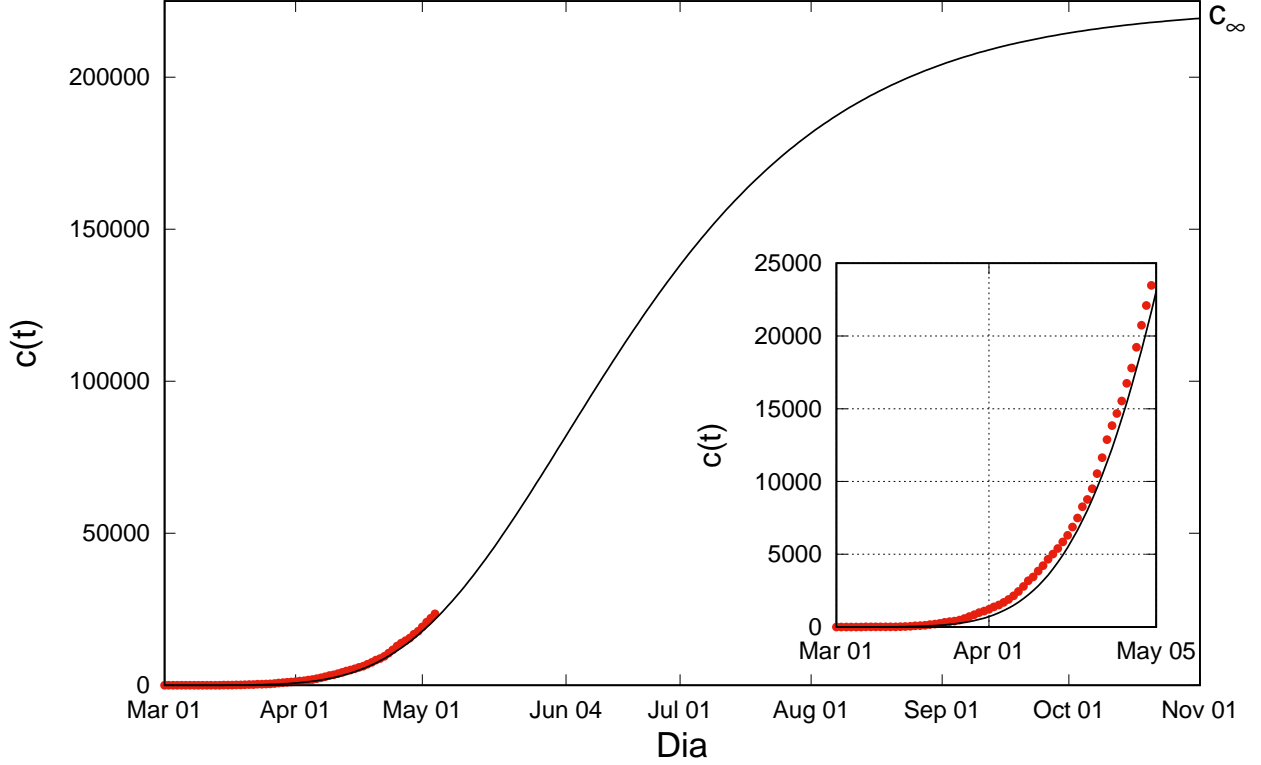


FIG. 2: Evolución de los casos confirmados como función del tiempo. Los datos experimentales son los puntos rojos y el ajuste teórico es la línea negra. En el recuadro se observa la coincidencia del ajuste hasta el día 4 de marzo.

Los parámetros  $t'_{max}$  y  $\gamma'$  tendrán valores de prueba hasta que llegemos a una convergencia en donde la función de prueba alcance un valor límite que defina el valor asintótico  $c_\infty$ . Matemáticamente esta condición se puede expresar mediante la relación

$$\lim_{t'_{max} \rightarrow t_{max}} \lim_{\gamma' \rightarrow \gamma} \Phi(t, \gamma', t'_{max}) = c_\infty \quad (11)$$

La curva de prueba  $\Phi(t, \gamma', t'_{max})$  fue realizada para diferentes valores de  $t'_{max}$  y el criterio de optimización fue encontrar un punto de convergencia para la función de prueba. El mejor valor que encontramos para la convergencia de la función de prueba fue el valor de  $t_{max}$  en el día 3 de junio del 2020. En la Fig. 1 se observa como para este valor de  $t_{max}$  encontramos una convergencia para la función de prueba en  $\gamma' = 0.0273$ , en donde la función de prueba converge a un valor de  $c_\infty = 220,000$ .

Considerando la terna de constantes  $c_\infty = 220,000$ ,  $\gamma = 0.0273$  y  $t_{max}$  como el día 3 de

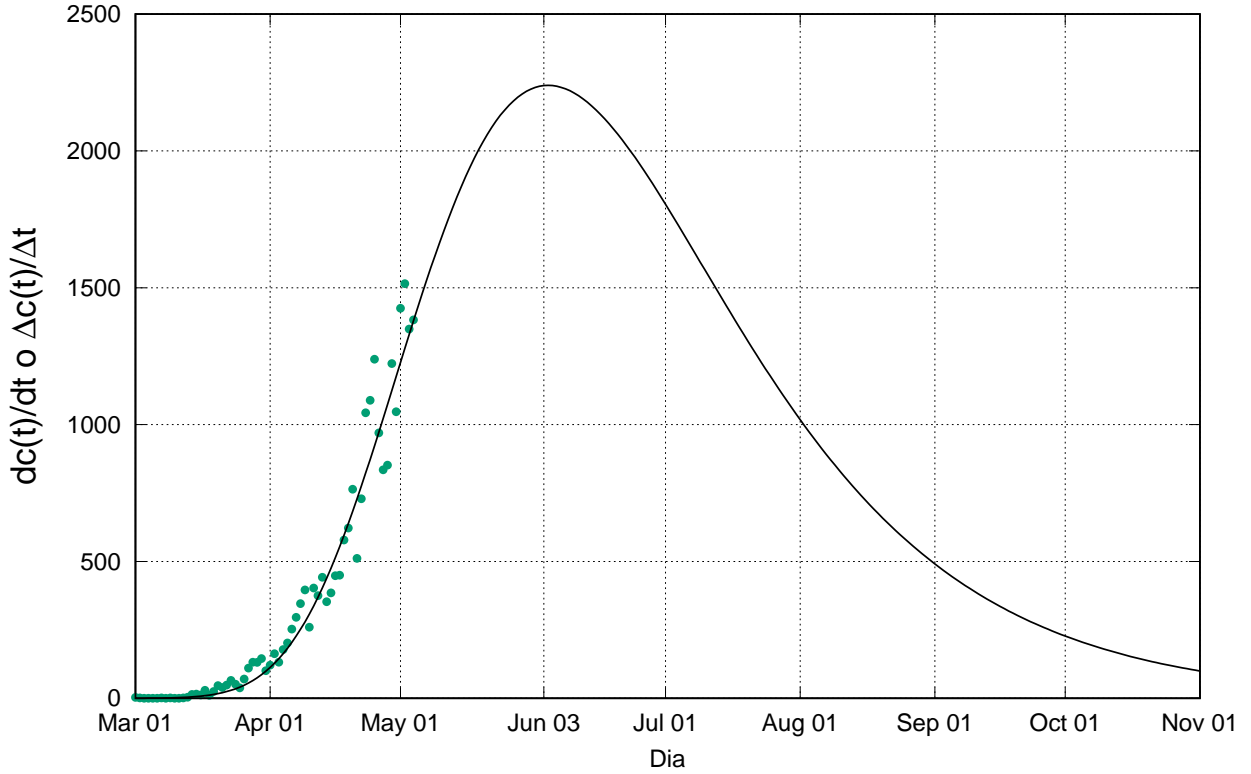


FIG. 3: Evolución de los casos confirmados por día. Los puntos verdes corresponden a los datos experimentales y la curva negra es el ajuste teórico. Se observa que el máximo número de casos por día se espera el 3 de junio del 2020.

junio, en la Fig. 2 presentamos el ajuste de los casos confirmados  $c(t)$  a una función de Gompertz. Los puntos rojos son los datos experimentales de los casos confirmados.[19] Con línea negra presentamos nuestro ajuste teórico a la función de Gompertz según la ec. (7). Observamos que el límite asintótico de  $c(t)$  llega a  $c_\infty$  aproximadamente el día 1 de octubre. En el recuadro podemos apreciar con detalle el ajuste de los datos experimentales a la curva de Gompertz hasta el día 3 de mayo.

En la Fig. 3 presentamos la evolución del número de casos confirmados por día. En puntos verdes presentamos los puntos experimentales que se obtienen de la relación discreta de los datos experimentales

$$\frac{\Delta c(t)}{\Delta t} = \frac{c(t + \Delta t) - c(t)}{\Delta t} \quad (12)$$

donde  $\Delta t$  equivale a un día. La línea negra corresponde a la ec. (8). Se observa que hasta

el día 4 de mayo los puntos experimentales siguen consistentemente la curva teórica. El máximo de número de casos por día se espera para el día 3 de junio.

#### IV. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos presentado un ajuste empírico de la función de Gompertz para la propagación de COVID-19 para México. El ajuste de la curva se realiza mediante un proceso de ajuste de datos para un fenómeno que está *en curso*. Nuestro ajuste predice un número de máximo de incidencia de casos para el 3 de junio del 2020. Se espera que la evolución de la enfermedad llegue a un máximo de aproximadamente 220,000 casos confirmados para el mes de octubre.

- 
- [1] <https://medium.com/@tomaspuero/coronavirus-the-hammer-and-the-dance-be9337092b56>
  - [2] <https://arxiv.org/>
  - [3] M. H. Félix-Medina, Estimación del número de reproducción de la epidemia COVID-19 en Culiacán Sinaloa, México, *arXiv* : 2004.10291v1
  - [4] U. Avila-Ponce de León, A. G. C. Pérez, E. Avila-Vales, A data driven analysis and forecast of an SEIARD epidemic model for COVID-19 in Mexico, *arXiv* : 2004.08288
  - [5] A. Vivanco-Lira, Predicting COVID-19 distribution in Mexico through a discrete and time-dependent Markov chain and an SIR-like model, *arXiv* : 2003.06758.
  - [6] E. Kaxiras, G. Neofotistos, E. Angelaki, The first 100 days: modeling the evolution of the COVID-19 pandemic, *arXiv* : 2004.14664
  - [7] Gompertz B. On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B: Biological Sciences*. 1825;182:513–85.
  - [8] M. H. Zwietering, I. Jongenburger, F. M. Rombouts, and K. van Riet, Modeling of the bacterial growth curve, *Applied and Environmental Microbiology* 56, 1875-1881 (1990).
  - [9] F. Caravelli, L. Sindoni, F. Caccioli, and C. Ududec, Optimal growth trajectories with finite carrying capacity, *Phys. Rev. E* 94, 022315(2016)



- [10] Bakher Naseri, M., Elliott, G. The diffusion of online shopping in Australia: Comparing the Bass, Logistic and Gompertz growth models. *J Market Anal* 1, 49–60 (2013).
- [11] P. Castorina, A. Iorio, D. Lanteri, Data analysis on Coronavirus spreading by macroscopic growth laws, *arXiv:2003.00507*
- [12] D.Lanteri, D.Carco, P.Castorina,How macroscopic laws describe complex dynamics: asymptomatic population and CoviD-19 spreading, *arXiv:2003.12457*
- [13] Apiano F. Morais,Logistic approximations used to describe new outbreaks in the 2020 COVID-19 pandemic,*arXiv:2003.11149*
- [14] Vasconcelos GL, Macedo AMS, Ospina R, et al. Modelling fatality curves of COVID-19 and the effectiveness of intervention strategies. medRxiv; 2020. DOI: 10.1101/2020.04.02.20051557.
- [15] Gabriele Martelloni, G. Martelloni, Analysis of the evolution of the Sars-Cov-2 in Italy, the role of the asymptomatics and the success of Logistic model, *arXiv:2004.02224*
- [16] D. T., Z. Varallyay, COVID-19 epidemic outcome predictions based on logistic fitting and estimation of its reliability,*arXiv:2003.14160*
- [17] H. M. Singer, The COVID-19 pandemic: growth patterns, power law scaling, and saturation, *arXiv:2004.03859*
- [18] M. Villalobos-Arias, Estimation of population infected by Covid-19 using regression Generalized logistics and optimization heuristics, *arXiv:2004.01207*
- [19] <https://data.humdata.org/dataset/novel-coronavirus-2019-ncov-cases>
- [20] El sitio de ELM laboratory se encuentra en <https://elm.nsupdate.info/>. Para ver los ajustes para México es necesario acceder a los siguientes dos enlaces: <https://elm.nsupdate.info/virus/xxbycountry-176.png> y <https://elm.nsupdate.info/virus/xxinfectionsbycountry-176.png>
- [21] P. H. Franses, "Fitting a Gompertz Curve", *J. Opl. Res. Soc.* 45, 109-113 (109).
- [22] K. M. C. Tjorve, E. Tjrve, The use of Gompertz models in growth analysis, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family, *Plos one* 16, No. 6 (2017)