

# UNIVERSIDAD DE SONORA

DIVISIÓN DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Programa de Licenciatura en Física

Ondas térmicas de difusión en una varilla metálica

## T E S I S

Que para obtener el título de:

**Licenciado en Física**

Presenta:

HUMBERTO CAMACHO GUILLEN

Director de tesis: Dr. JESÚS MANZANARES MARTÍNEZ

Hermosillo, Sonora, México,      9 de septiembre de 2023

---

## SINODALES

A

**Dr. JESÚS MANZANARES MARTÍNEZ**

B

**Dr. LUIS PATRICIO RAMIREZ RODRIGUEZ**

C

**Dr. TEMISTOCLES MENDIVIL REYNOSO**

D

**Dr. DIEGO SOTO PUEBLA**



# Contenido

<b>Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Introducción . . . . .	2
<b>1 Antecedentes</b>	<b>4</b>
1.1. Método de Angstrom . . . . .	4
1.2. Obtención de la ecuación de calor . . . . .	5
1.3. Descripción experimento de Anwar . . . . .	7
<b>2 Marco teorico</b>	<b>10</b>
2.1. Nuestra versión de la solución general de la ecuación de calor . . . . .	10
2.2. Derivación de la ec. (1.9) . . . . .	14
<b>3 El experimento</b>	<b>15</b>
3.1. Las componentes del experimento . . . . .	15
3.1.1. Varilla de aluminio . . . . .	15
3.1.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 110 Volts . . . . .	15
3.1.2.1. Características de resistencia . . . . .	16
3.1.3. Disipador de calor de aluminio . . . . .	16
3.1.4. Sensores de temperatura . . . . .	17
3.1.4.1. LM35 . . . . .	18
3.1.4.2. Características principales del LM35 . . . . .	18
3.1.4.3. Pines del sensor LM35 . . . . .	18
3.2. Arduino Nano y Mega2560 . . . . .	19
3.2.1. Arduino Nano . . . . .	19
3.2.2. Características de Arduino nano . . . . .	19

3.2.3.	Comunicación de Arduino nano . . . . .	20
3.2.4.	Programación de Arduino nano . . . . .	20
3.2.5.	Arduino Mega2560 . . . . .	22
3.2.6.	Características más importantes de Arduino mega2560 . . . . .	22
3.2.7.	Conector USB de Arduino mega2560 . . . . .	22
3.2.8.	Pines del Arduino MEGA 2560 . . . . .	23
3.2.9.	Programacion Arduino MEGA2560 . . . . .	24
3.3.	Módulo relay . . . . .	24
3.3.1.	Conexiones del módulo de relay . . . . .	24
3.4.	Diseño experimental . . . . .	25
3.4.1.	Colocación de varilla de aluminio y resistencia en disipadores de aluminio . . . . .	26
3.4.2.	Distribución de sensores LM35 . . . . .	26
3.4.3.	Programación de Arduino MEGA2560 para sensores LM35 . . . . .	27
3.4.4.	Conexiones de sensores LM35 a Arduino MEGA2560 . . . . .	28
3.4.5.	Alimentación de la resistencia de cerámica cubierta de aluminio . . . . .	28
3.4.6.	Código de configuración Arduino-Relay . . . . .	29
3.4.7.	Obtención de datos de Arduino . . . . .	30
3.5.	Datos obtenidos: . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Analisis Teorico-Experimental</b>	<b>32</b>
4.1.	Análisis Teórico-Experimental . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Oscilación en ambos extremos</b>	<b>39</b>
5.1.	Fuente de calor oscilante en ambos extremos . . . . .	39
5.2.	La fuente de calor oscilante . . . . .	39
5.2.1.	Caso para $x = 0$ . . . . .	39
5.2.2.	Caso para $x = d$ . . . . .	40
5.3.	Aplicación de condiciones de frontera . . . . .	40
5.3.1.	Caso para $x = 0$ . . . . .	40
5.3.2.	Caso para $x = d$ . . . . .	41
5.4.	Determinación de coeficientes . . . . .	41
5.4.1.	Caso para $e^{-i\omega_0 t}$ . . . . .	41
5.4.2.	Coefficientes no oscilatorios . . . . .	42

5.4.3. Caso para $e^{i\omega_0 t}$ . . . . .	42
5.5. Ecuación de temperatura para la varilla . . . . .	43
5.6. Resultados para el caso fuentes en fase . . . . .	43
5.7. Resultados para el caso fuera de fase . . . . .	45
<b>Conclusiones</b>	<b>46</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>47</b>

# Índice de figuras

1.1. Experimento realizado por Angstrom en 1863, figura tomada de la ref. [3] . . . . .	4
1.2. Ilustración de sección diferencial de varilla en el eje x . . . . .	6
1.3. Ilustración del experimento de Anwar [Figura tomada de ref. [2]] . . . . .	8
1.4. Gráfica de toma de datos [Figura tomada de ref. [2]] . . . . .	8
3.1. Varilla de aluminio . . . . .	15
3.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 110 volts . . . . .	16
3.3. Disipador de temperatura de aluminio con ventilador . . . . .	17
3.4. Ilustración de sensor de temperatura LM35 [6] . . . . .	19
3.5. Arduino Nano . . . . .	19
3.6. Configuración de la Placa Arduino Nano en el IDE . . . . .	21
3.7. Diagrama que representa la configuración de pines I/O analógico digital, pwm, etc. de la placa Arduino Nano . . . . .	21
3.8. Imagen ilustrativa de entrada USB de la placa Arduino Mega 2560 [8]. . . . .	23
3.9. Imagen ilustrativa de entradas analógicas de la placa Arduino Mega 2560 . . . . .	23
3.10. Configuración de la Placa Arduino Nano en el IDE . . . . .	24
3.11. Ilustración de Modulo Relay . . . . .	25
3.12. Ilustración de conexiones de Modulo Reley . . . . .	25
3.13. Varilla de aluminio sostenida por disipadores. . . . .	26
3.14. Ilustración de sensores LM35 colocados en varilla de aluminio. . . . .	27
3.15. Código de programación para Arduino en sensor de temperatura LM35. . . . .	27
3.16. Ilustración de conexion Arduino MEGA2560 con sensor de temperatura LM35 . . . . .	28
3.17. Conexión de fuente110V-Resistencias-RelayDoble-ArduinoNano. . . . .	29
3.18. Código relay doble en Arduino. . . . .	29
3.19. Código python para leer los datos de Arduino . . . . .	30

3.20. Gráfica de datos obtenidos en el experimento . . . . .	31
4.1. Gráfica de datos teóricos obtenidos para la posición $x = 0$ . . . . .	33
4.2. Variación de la temperatura como función del tiempo para sensores de temperatura en diferentes posiciones. . . . .	35
4.3. Temperatura oscilante para el caso en que $x = 0$ . Los valores experimentales y teóricos se muestran colores negro y rojo, respectivamente. . . . .	36
4.4. Ajuste teórico (línea roja) de los datos experimentales (puntos azules) obtenidos en el punto $x = 0$ . . . . .	37
4.5. Gráfica de difusividad térmica . . . . .	38
5.1. Datos experimentales en fase comparados con los obtenidos teóricamente en diferentes tiempos. . . . .	44
5.2. Datos experimentales en una oscilación en fase de ambos extremos. . . . .	44
5.3. Datos experimentales en una oscilación en fase de ambos extremos. . . . .	45
5.4. Datos experimentales en desfase comparados con los obtenidos teóricamente en diferentes tiempos. . . . .	45

---

# Agradecimientos |

A lo largo de todo mi aprendizaje en la universidad he tenido muchas experiencias, las cuales estoy seguro que ayudaron a mi desarrollo personal y académico. Estoy completamente agradecido con las personas que me apoyaron a lo largo de mi carrera, compañeros de clase que se convirtieron en amigos inseparables, profesores que nutrieron mis conocimientos y finalmente mi director de tesis que fue un gran apoyo para la finalización de mi tesis de licenciatura.

Quiero hacer un agradecimiento honorario a mi madre y mi padre, los cuales siempre me brindaron su apoyo moral e incondicional sin dudarlo.

Sin más que agregar, espero que la tesis escrita a continuación sea de su agrado, gracias.

# *Introducción*

## **1.1. Introducción**

Si una muestra metálica se calienta periódicamente en un extremo, las oscilaciones térmicas se propagarán a lo largo de la muestra. Esta es la base de un experimento realizado en 1998 por A. Bodas et al. [1], en donde se describe cómo un calentamiento periódico en un extremo se propaga a través de una barra metálica. En ese experimento, las lecturas de temperatura se realizaban manualmente y el tiempo se medía con un cronómetro. Lamentablemente, la medición manual introduce muchos errores.

En 2014, M. S. Anwar et al. publicaron un artículo que reportó una versión mejorada del experimento para la detección de ondas térmicas.[2] Por ejemplo, se introducen mejoras técnicas tales como el uso de tarjetas computacionales PCI que permiten un centro automatizado en función del tiempo tanto para la detección de la temperatura, como para el control de la fuente de calor.

En esta tesis, nosotros proponemos una nueva versión del experimento para la detección de ondas térmicas. Nuestro diseño experimental se basa en el uso de microcontroladores arduino. Arduino es una plataforma de desarrollo basada en una placa electrónica de hardware libre que incorpora un microcontrolador reprogramable y una serie de conectores hembra. Estos permiten establecer una comunicación entre el microcontrolador y los diferentes sensores y dispositivos de una manera muy sencilla.

Es pertinente mencionar que nuestro conocimiento de arduino ha sido un desarrollo de auto-aprendizaje, que hemos comenzado desde cero, ya que el tema de microcontroladores no forma parte de nuestro plan de estudios. En este proceso, la elección de los diferentes dispositivos, detectores y configuraciones experimentales fue un largo proceso de prueba y error. Por este motivo, para nosotros es una meta importante entender y reproducir el tipo de resultados experimentales de la configuración propuesta por Anwar et al. [2].

Por otra parte, hemos desarrollado una versión propia para plantear la solución general de la ecuación de calor. Pensamos que nuestro tratamiento matemático se relaciona mejor con forma en como aprendemos el análisis de Fourier. Es necesario mencionar que en el artículo de Anwar,

la solución a la ecuación de calor se plantea como un *ansatz*. [2] Un *ansatz* es define como “una propuesta razonable de solución” que es puesta a prueba. Nosotros desarrollamos una forma de solución que es más general, y con la cual, bajo las condiciones experimentales apropiadas, podemos derivar ese *ansatz* que se propone como solución a la ecuación de calor. El material de esta tesis lo dividimos de la siguiente manera. En el capítulo 1 comentamos algunos antecedentes sobre el estudio de ondas térmicas. En el capítulo 2, mostramos la teoría que hemos desarrollado para resolver la ecuación de calor en una barra. En el capítulo 3, presentamos nuestra versión del experimento utilizando arduino. En el capítulo 4, mostramos una comparación teórico-experimental de nuestros resultados.

# Capítulo 1

| *Antecedentes*

## 1.1. Método de Angstrom

En 1863, Angstrom[3] publicó los resultados de un estudio sobre la conductividad térmica de los sólidos obtenidos mediante una técnica no estacionaria desarrollada específicamente para este propósito. Su trabajo es de un interés excepcional tanto desde el punto de vista de su elegancia matemática como desde el punto de vista de la novedad de su método experimental.

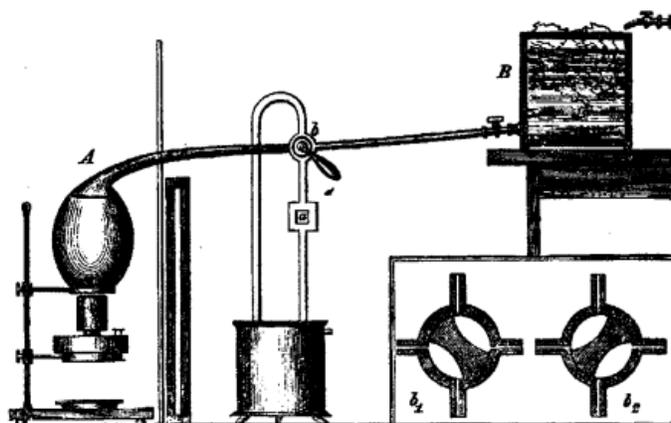


Figura 1.1: Experimento realizado por Angstrom en 1863, figura tomada de la ref. [3]

El hecho de que las medidas puedan obtenerse en tiempos muy cortos es quizá la característica más distintiva del método de Angstrom. Este utilizó barras largas de pequeña sección transversal cuyo origen se sometía a cambios periódicos de temperatura, siendo alternativamente calentado por una corriente de vapor y enfriado por una corriente de agua fría durante intervalos iguales de tiempo hasta que se conseguía obtener una oscilación en la temperatura de la barra. Cuando esta operación se ha realizado durante un cierto tiempo y los transitorios iniciales han desaparecido, la temperatura de la varilla finalmente alcanza un estado periódico, independiente de la distribución inicial, y tal que las características de la onda de temperatura en cualquier punto a lo largo de la barra se reproducen con un período fundamental igual al período del ciclo de calentamiento y enfriamiento del origen de la barra. Es este el estado estacionario en que Angstrom realiza sus medidas y del que dependen sus resultados, de manera que pudo demostrar que a partir de las

medidas de las características de la onda de temperatura en dos puntos diferentes de la barra se podía determinar la difusividad térmica del material mediante una fórmula sorprendentemente sencilla como más adelante se demostrará y que resulta independiente de la naturaleza de la superficie de la barra.

Existen versiones recientes de este método para determinar la difusividad térmica en diferentes materiales como por ejemplo metales [10], semiconductores [11] y medios biológicos [12]. En este trabajo nos basamos en dos artículos que fueron publicados en el *American Journal of Physics*, el cual es una revista para estudiantes de física a nivel licenciatura. [1, 2] Ambos artículos plantean mejoras técnicas al experimento de ondas térmicas en una barra. Sin embargo, a excepción de un artículo publicado por Buksman et al [13], nosotros no tenemos conocimiento de algún otro trabajo en donde se utilice Arduino para este experimento de ondas térmicas en barras. Nosotros nos planteamos a realizar un experimento en Arduino que logre medir ondas térmicas en una barra que sea una base para posteriormente plantearnos otros experimentos en donde seamos capaces de medir fenómenos de interferencia de ondas térmicas.

## 1.2. Obtención de la ecuación de calor

El uso de oscilaciones periódicas de temperatura en estado estacionario para determinar la difusividad térmica, fue primero descrito por Angstrom en 1863 [3] y generalmente conocido como el método de *Ángstrom*. Este método está basado en la ecuación de Fourier unidimensional donde, principalmente, la fuente de calor está configurada para generar temperatura en forma de onda sinusoidal. Cuando un flujo de calentamiento sinusoidal se transmite por la muestra desde un extremo, los valores de temperatura en cualquier punto del interior de la muestra presentan fluctuaciones periódicas. Por lo que medir la distribución de temperatura en dos puntos separados nos da dos ondas con diferentes amplitudes y fases temporales. En este estudio consideramos el caso para el cual las pérdidas de calor a los lados de la muestra son insignificantes.

Para plantear la ecuación diferencial que describe el proceso de transferencia de calor, se supone un sólido (homogéneo) de densidad  $\rho$ , calor específico  $c$  y conductividad térmica  $\kappa$ , magnitudes todas constantes en el intervalo de temperaturas considerado.

Consideremos que tomamos una sección diferencial  $dx$  y con distribución de calor está restringida en la dirección  $x$ , como podemos verlo en la Figura 1.2.

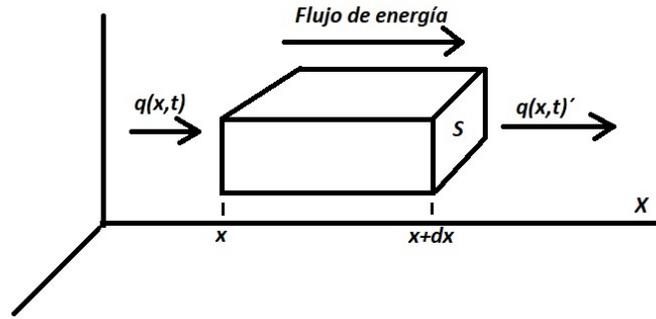


Figura 1.2: Ilustración de sección diferencial de varilla en el eje  $x$

La ley de Fourier afirma que hay una proporcionalidad entre el flujo de energía  $q(x, t)$  y el gradiente de temperatura:

$$q(x, t) = -\kappa \frac{dT(x, t)}{dx} \quad (1.1)$$

Si el medio es una varilla con material uniforme, la posición es una sola coordenada  $x$ .

El flujo de calor que entra a la dirección  $dx$  es  $q(x, t)$ , y sale un flujo de calor  $q(x, t)'$ , como podemos ver en la fig. 1.2. El flujo de la energía calorífica cambia (en la unidad de tiempo) en una cantidad igual a la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente.

$$q(x, t) - q'(x, t) = -\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} \quad (1.2)$$

Esta energía se emplea en cambiar la temperatura del elemento.

$Q = Q(x, t)$  será la energía calorífica interna (por unidad de volumen) de la varilla en cada punto y momento. La tasa de cambio de energía calorífica absorbida o cedida (por unidad de volumen y tiempo) en el material  $\partial Q/\partial t$ , es proporcional a la tasa de cambio de su temperatura  $\partial T/\partial t$  (por unidad de tiempo), por el producto de la densidad de dicho elemento, por el calor específico. Por tanto:

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.3)$$

Esta derivación asume que el material tiene una densidad de masa y una capacidad calorífica constantes a través del espacio y el tiempo.

Igualando ambas expresiones (1.2) ,(1.3) y teniendo en cuenta la ley de Fourier, se obtiene la ecuación diferencial que describe la conducción térmica:

$$\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.4)$$

Sustituyendo (1.1) en (1.4):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( -\kappa \frac{dT(x, t)}{dx} \right) = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \kappa = \rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.6)$$

Nombramos a  $\frac{\kappa}{\rho c} = D$

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

Siendo que  $D$  es llamada constante de difusividad térmica, así llegamos a la ecuación de calor usada por Angstrom.

### 1.3. Descripción experimento de Anwar

La aplicación de calor en un medio metálico con variación periódica en el tiempo, es la base para obtener ondas térmicas. Esto fue lo que implementó Anwar en 2014, basándose en el experimento realizado en 1998 por A. Bodas, realizando una mejora considerable y desarrollando un método para determinar la difusividad térmica de una varilla metálica de cobre, a la cual se le aplica un pulso de calor alternante en uno de los extremos y dejando el otro lado a temperatura ambiente[2, 1]. Esto provoca que una onda se propague a lo largo de la varilla, creando una variación periódica de la temperatura en diferentes puntos.

En comparación con el experimento realizado por A. Bodas[1], en la versión de Anwar[2] se incorporó un sistema computacional para la toma de datos, teniendo como objetivo general demostrar el análisis de Fourier, el cual permite visualizar con mucha claridad la perturbación de las ondas térmicas en la varilla.

### Composición del experimento

Como se mencionó anteriormente, este experimento muestra una adaptación moderna del experimento original de Bodas[1]. Se utilizó una varilla de cobre cilíndrica de 50 cm de longitud. Para este experimento se aplicó calor con un calentador de cartucho casero de 25 watts, colocado en uno de sus extremos, el cual está conectado a una fuente que administra un voltaje para funcionar correctamente. Esta fuente es apagada y encendida manualmente con un periodo de 80 segundos.

Como aislante para minimizar la pérdida de calor por radiación, la varilla fue envuelta con papel de fibra de vidrio. En la fig.(1.3) podemos ver la disposición experimental.

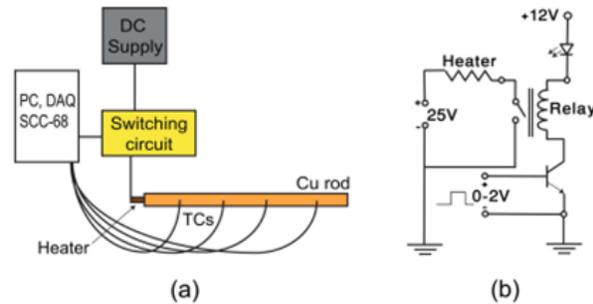


Figura 1.3: Ilustración del experimento de Anwar [Figura tomada de ref. [2]]

Para esta varilla de cobre, la temperatura fue tomada en cuatro puntos diferentes. La medición se realizó usando termopares, separados a una distancia de  $3.3 \pm 0.2$  cm. Las temperaturas detectadas por los termopares son monitorizadas por un termistor.

Los datos fueron recolectados utilizando la tarjeta de adquisición de datos PCI 6221 de National Instrument. Este instrumento lee los voltajes de la unidad de adquisición de datos y cambia estos voltajes a temperaturas, obteniendo 4000 datos en total.

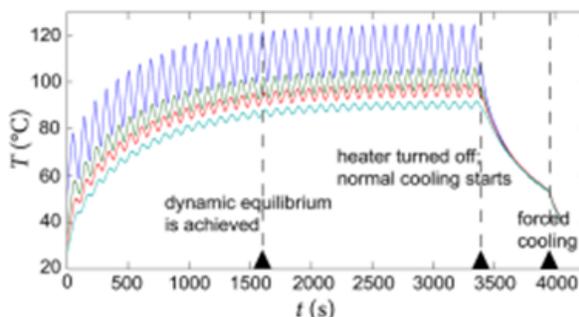


Figura 1.4: Gráfica de toma de datos [Figura tomada de ref. [2]]

### Teoría en experimento de Anwar

La propuesta de solución de la ec. (1.7) fue realizada en función de un Anzats de la forma:

$$T(x, t) = c_0(x) + \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} c_n(x) \cos(w_n t - \varepsilon_n) \quad (1.8)$$

$$T(x, t) = P_1 x + \langle T(0) \rangle - \frac{4 \Delta T}{\pi^2} \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{-x}{d_n}} \cos(w_n t - \frac{x}{d_n}) \quad (1.9)$$

Esta propuesta de solución no fue derivada, sino que es presentada como una "sugerencia de solución". Esta forma de proponer la solución no la encontramos satisfactoria, ya que si modificamos las condiciones de frontera, tenemos que "adivinar" otro tipo de solución. Por esta razón, nos pareció necesario desarrollar un método general que nos permita encontrar la solución para cualquier tipo de condiciones de frontera. Nuestro método lo presentamos a continuación en el cap. 2.

# Capítulo 2

| Marco teorico

## 2.1. Nuestra versión de la solución general de la ecuación de calor

Consideremos la ecuación de difusión de calor para la temperatura ( $T$ ) en función de la posición ( $x$ ) y del tiempo ( $t$ )

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T(x, t), \quad (2.1)$$

Donde  $D$  es la difusividad térmica.

Para el caso estacionario, proponemos que la solución se puede escribir en términos de una serie de Fourier.

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} T_n(x, t). \quad (2.2)$$

Como esperamos que la solución sea separable en  $x$  y  $t$  proponemos

$$T_n(x, t) = A_n(x)B_n(t), \quad (2.3)$$

que nos permite separar la ecuación diferencial en la forma:

$$\frac{D}{A_n(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_n(x) = \frac{1}{B_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} B_n(t) \quad (2.4)$$

Considerando solamente la parte temporal tenemos,

$$\frac{1}{B_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} B_n(t) = C_n \quad (2.5)$$

Donde  $C_n$  es una constante de separación. Sabemos que las soluciones oscilan en el tiempo, por lo tanto, es razonable plantear

$$B_n(t) = b_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.6)$$

Donde hemos introducido:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}. \quad (2.7)$$

Definiendo un periodo arbitrario  $\tau_0$ . Sustituyendo la ecuación 2.6 en 2.5 determinamos la constante de separación  $C_n = in\omega_0$ .

Si sustituimos la solución temporal (2.6) en la ecuación (2.3) tenemos

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A_n(x) b_n e^{in\omega_0 t} \quad (2.8)$$

Es conveniente contraer los coeficientes indeterminados mediante la relación  $A'_n(x) = A_n(x) b_n$  para escribir

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \quad (2.9)$$

y separar la sumatoria en la forma:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \quad (2.10)$$

Planteamos un cambio de variable para el primer término de la sumatoria del lado derecho. Proponemos  $n' = -n$  para tener;

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} = \sum_{-n'=-\infty}^{-n'=-1} A'_{-n'}(x) e^{-in'\omega_0 t} \quad (2.11)$$

Es conveniente cambiar el índice mudo  $n = n'$  para tener;

$$\sum_{-n'=-\infty}^{-n'=-1} A'_{-n'}(x) e^{-in'\omega_0 t} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} \quad (2.12)$$

Considerando entonces las ecs. (2.11) y (2.12) podemos escribir la ecuación (ref2.10) de la forma;

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \quad (2.13)$$

Sustituyendo la solución (2.13) en la ecuación (2.1) tenemos;

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \right] =$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \right] \quad (2.14)$$

Aplicando la derivada tenemos;

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) \right] e^{-in\omega_0 t} + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) \right] e^{i\omega_0 t} = \\ \sum_{n=1}^{n=\infty} [-in\omega_0 A'_{-n}(x)] e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [in\omega_0 A'_n(x)] e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Igualando término a término tenemos tres ecuaciones diferenciales;

- Para  $A'_n$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) = i \frac{n\omega_0}{D} A'_n(x) \quad (2.16)$$

- Para  $A'_0$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) = 0 \quad (2.17)$$

- Para  $A'_{-n}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) = -i \frac{n\omega_0}{D} A'_{-n}(x) \quad (2.18)$$

Analizamos la solución de cada uno de estos tres casos. Para  $A'_n$ :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) = i \frac{n\omega_0}{D} A'_n(x) \quad (2.19)$$

La solución que planteamos para este caso es:

$$A'_n(x) = a_n^+ \exp \left[ \sqrt{i \frac{n\omega_0}{D}} x \right] + a_n^- \exp \left[ -\sqrt{i \frac{n\omega_0}{D}} x \right] \quad (2.20)$$

Es necesario obtener  $\sqrt{i}$  identificando que el número complejo en forma polar se escribe como:

$$i = e^{i\pi/2} \quad (2.21)$$

Y la raíz se obtiene:

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad (2.22)$$

Introduciendo este término, tenemos que la solución es de la forma:

$$A'_n(x) = a_n^+ \exp \left[ (1+i) \sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x \right] + a_n^- \exp \left[ -(1+i) \sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x \right] \quad (2.23)$$

Es conveniente reescribir:

$$A'_n(x) = a_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \quad (2.24)$$

$$d_n = \sqrt{\frac{2D}{n\omega_0}} \quad (2.25)$$

Para  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) = 0$ , se propone la solución:

$$A'_0(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (2.26)$$

Ahora para  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) = -i \frac{n\omega_0}{D} A'_{-n}(x)$ , se propone como solución:

$$A'_n(x) = a_{-n}^+ \exp \left( \sqrt{-i \frac{n\omega_0}{D}} x \right) + a_{-n}^- \exp \left( -\sqrt{-i \frac{n\omega_0}{D}} x \right) \quad (2.27)$$

Es necesario obtener  $\sqrt{-i}$  identificando que el número complejo en forma polar se escribe como:

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad (2.28)$$

y la raíz se obtiene

$$\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \quad (2.29)$$

$$A'_{-n}(x) = a_{-n}^+ \exp \left[ (1-i) \sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x \right] + a_{-n}^- \exp \left[ -(1-i) \sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x \right] \quad (2.30)$$

Así que conviene plantear:

$$A'_{-n}(x) = a_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \quad (2.31)$$

Considerando estas soluciones para los coeficientes  $A'_n$ ,  $A_0(x)$  y  $A'_{-n}$  tenemos que la temperatura es:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ a_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \right] e^{-in\omega_0 t}$$

$$\begin{aligned}
& + [\alpha_0 + \alpha_1 x] \\
& + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ a_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \right] e^{in\omega_0 t} \quad (2.32)
\end{aligned}$$

La forma más sencilla para comprobar la eficiencia de nuestra forma para la solución de la ecuación unidimensional de calor es aplicando condiciones de frontera en nuestra solución para obtener la propuesta por Anwar en la ref[2].

## 2.2. Derivación de la ec. (1.9)

Podemos reescribir nuestra ecuación para la temperatura, eliminando los términos  $a_{-n}^+ = a_n^+ = 0$ , ya que la solución no crece cuando  $x$  va en aumento

$$T(x, t) = \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} e^{-in\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} e^{in\omega_0 t}$$

De la forma

$$T(x, t) = [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} l_n e^{-x/d_n} \left[ e^{i(x/d_n - n\omega_0 t)} + e^{-i(x/d_n - n\omega_0 t)} \right] \quad (2.33)$$

Aplicando propiedades del exponencial, tenemos:

$$T(x, t) = [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} 2l_n e^{-x/d_n} \cos(x/d_n - n\omega_0 t) \quad (2.34)$$

Así finalmente podemos llegar a la ecuación propuesta por Anwar en la ref.[2]

$$T(x, t) = [\alpha_0 + \alpha_1 x] - \frac{4(T_h - T_l)}{(\pi n)^2} \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} e^{-x/d_n} \cos(x/d_n - n\omega_0 t) \quad (2.35)$$

Esta expresión es la ecuación (1.9) que define la solución que encontró Anwar[2]. El hecho de obtener la solución analítica de Anwar nos permite confiar que nuestra solución es correcta.

# Capítulo 3

| *El experimento*

En esta tesis proponemos una nueva versión del experimento para la detección de ondas térmicas. Esta versión consta de una mejora considerable al realizado por Anwar, basándonos en analizar a detalle el comportamiento de las ondas térmicas en una barra de aluminio, con el objetivo principal de obtener la difusividad térmica. Para esto es necesario conocer cada uno de sus componentes y su funcionamiento, para entender de manera más sencilla el experimento.

## 3.1. Las componentes del experimento

A continuación presentaremos los elementos más importantes de nuestro diseño experimental.

### 3.1.1. Varilla de aluminio

Como medio conductor de calor utilizaremos una varilla de aluminio de 20 cm de longitud, como se muestra en la fig.(3.1). Esta varilla fue adquirida en un distribuidor de metales de la localidad y no cuenta con tabla de propiedades físicas del fabricante.



Figura 3.1: Varilla de aluminio

### 3.1.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 110 Volts

La resistencia mostrada en la fig.(3.2), también llamada resistencia de PTC, se utiliza para calentar el aire o superficies sólidas. El PTC tiene una característica que lo hace especial y es la temperatura constante en la superficie del material, lo que le permite variar su potencia según la necesidad, con una larga vida útil.



Figura 3.2: Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 110 volts

#### 3.1.2.1. Características de resistencia

- Alimentación a 110v (Corriente de la luz común)
- Potencia máxima: 80 W
- Tamaño: 760mm Largo \* 200mm Ancho \* 50mm espesor
- Material calefactor: PTC
- Cable: línea de alta temperatura
- Superficie aislada

#### 3.1.3. Disipador de calor de aluminio

El disipador de calor fig.(3.3) es en realidad un intercambiador de calor, que extrae calor de un fluido y lo cede a otro (aire ambiente, por ejemplo). O bien, extrae calor del ambiente para cederlo a un fluido. Dichos procesos de intercambio son clave en cualquier sistema de refrigeración industrial. Se utiliza para reducir la temperatura de algunos componentes electrónicos de los aparatos que se produce debido al uso.

El funcionamiento de un disipador de calor es muy sencillo pero importante, pues consiste en hacer de mecanismo de transmisión de calor de la fuente más caliente hacia la fuente más fría[5].

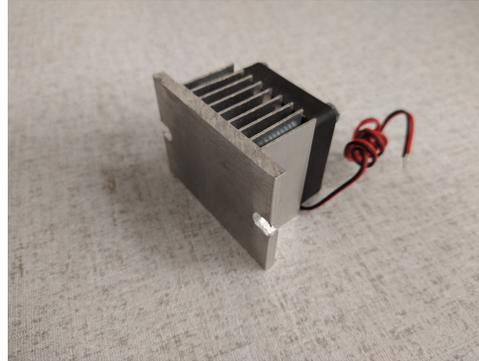


Figura 3.3: Disipador de temperatura de aluminio con ventilador

#### 3.1.4. Sensores de temperatura

Los sensores de temperatura son dispositivos que transforman los cambios de temperatura en cambios en señales eléctricas que son procesados por equipo eléctrico o electrónico. Los sensores de temperatura se utilizan para variados propósitos, como el control de sistemas de refrigeración, laboratorios, procesos automotrices, siendo generalmente utilizados en procesos industriales. La medida de la temperatura ocurre típicamente en líquidos o a través de contacto con la superficie. La medida del contacto no se requiere siempre; sin embargo, existen en el mercado sensores que pueden hacer una medida de calor sin contacto físico. Esto se hace normalmente con el uso de tecnología infrarroja.

Cuando se selecciona un sensor existe una gran cantidad de consideraciones que se deben tener en cuenta, siendo este proceso de selección una toma de difícil decisión. Se sabe que el sensor debe ser capaz de medir una gran gama de temperaturas con el mínimo error posible, así como también la velocidad de respuesta de éste. En consideración a lo anteriormente señalado, cabe decir que los sensores presentes en el mercado generalmente no compatibilizan velocidad de respuesta, con precisión, por lo cual es necesario buscar un sensor que se adapte a las necesidades de esta investigación. Es decir, sacrificar velocidad a expensas de la precisión.

Un sensor de temperatura garantiza una salida continua en función de la temperatura real del sistema, lo que permite controlar por completo cualquier proceso.

#### 3.1.4.1. LM35

En nuestro caso usaremos un tipo de sensor de temperatura llamado LM35, el cual es un circuito electrónico sensor que puede medir temperatura. Su salida es analógica, es decir, te proporciona un voltaje proporcional a la temperatura. Su popularidad se debe a la facilidad con la que se puede medir la temperatura. Incluso no es necesario un microprocesador o microcontrolador para medir la temperatura. Dado que el sensor LM35 es analógico, basta con medir con un multímetro el voltaje de salida del sensor.

Para convertir el voltaje a temperatura, el LM35 proporciona 10mV por cada grado centígrado. También cabe señalar que este sensor se puede usar sin offset, es decir que si medimos 20mV a la salida, estaremos midiendo 2°C [6].

#### 3.1.4.2. Características principales del LM35

- Calibrado directamente en grados Celsius (centígrados)
- Lineal a un factor de escala de 10.0 mV / ° C
- Precisión de 0,5 ° C (a 25 ° C)
- Rango de temperatura de -55 ° C a 150 ° C
- Apto para aplicaciones remotas
- Bajo costo
- Funcionamiento de 4 a 30 V
- Drenaje de corriente de menos de 60 mA
- Bajo autocalentamiento, 0.08 ° C
- Salida de baja impedancia, 0.1Ω para carga de 1 mA

#### 3.1.4.3. Pines del sensor LM35

Los pinout del sensor de temperatura son tres: GND, VCC y VSalida donde dependiendo del empaquetado será el orden de conexión de los pines. En los sensores utilizados para nuestro experimento el pinout está distribuido como se muestra en la fig.(3.4).

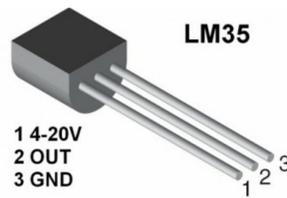


Figura 3.4: Ilustración de sensor de temperatura LM35 [6]

## 3.2. Arduino Nano y Mega2560

### 3.2.1. Arduino Nano

El Arduino Nano fig.(3.5) es una pequeña y completa placa basada en el ATmega328 (Arduino Nano 3.x). Tiene más o menos la misma funcionalidad del Arduino Duemilanove, pero en un paquete diferente. Cuenta con una sola toma de corriente continua, y funciona con un cable USB Mini-B en lugar de uno normal[7].

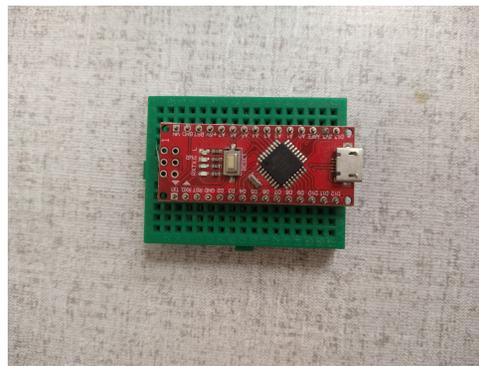


Figura 3.5: Arduino Nano

### 3.2.2. Características de Arduino nano

- Alimentación: El Arduino Nano puede ser alimentado a través de la conexión USB Mini-B con una fuente no regulada de 6-20V (pin 30), o 5V regulada(pin 27). La fuente de alimentación se selecciona automáticamente a la fuente de voltaje más alto.
- Memoria: El ATmega328 tiene 32 KB, (con 2 KB utilizado para el cargador de arranque). El ATmega328 tiene 2 KB de SRAM y 1 KB de EEPROM.
- Entrada y salida: Cada uno de los 14 pines digitales en el Nano puede usarse como una entrada o salida, utilizando las funciones `pinMode ()`, `digitalWrite ()`, y `digitalRead ()`.

Operan a 5 voltios. Cada pin puede proporcionar o recibir un máximo de 40 mA y tiene una resistencia pull-up interna (desconectado por defecto) de 20-50 kOhms.

El Nano tiene 8 entradas analógicas, cada una de las cuales proporciona 10 bits de resolución (es decir, 1024 valores diferentes). Por defecto se miden desde cero a 5 voltios, aunque es posible cambiar el extremo superior de su rango de uso con la función `analogReference()`. Los pines analógicos 6 y 7 no se pueden utilizar como pines digitales[7].

### **3.2.3. Comunicación de Arduino nano**

El Arduino Nano tiene una serie de instalaciones para la comunicación con un ordenador, otro Arduino, u otros microcontroladores. Los ATmega168 y ATmega328 proporcionan UART (circuito lógico para la transmisión y recepción del puerto serie) TTL (circuito lógico de transistor bipolar 5V) de comunicación en serie, que está disponible en los pines digitales 0 (RX) y 1 (TX), un FTDI Chip FT232RL (interfaz USB a UART) en los canales de comunicación en serie a través de USB, y los drivers FTDI (incluido con el software de Arduino) que proporcionan un puerto com virtual para el software en el ordenador. El software de Arduino incluye un monitor de serie que permite a los datos de texto simples para ser enviados hacia y desde la placa Arduino. Las RX y TX LED en el tablero parpadean cuando se están transmitiendo datos a través de la conexión USB FTDI al ordenador (pero no para la comunicación en serie en los pines 0 y 1). Una biblioteca `SoftwareSerial` permite la comunicación en serie en cualquiera de los pines digitales del Nano. El ATmega168 y ATmega328 también apoyan I2C(Inter-Integrated Circuit) y SPI (Serial Peripheral Interface). El software de Arduino incluye una biblioteca de alambre para simplificar el uso de la I2C bus; véase la documentación para más detalles. Para utilizar la comunicación SPI, consulte el ATmega168 o ATmega328 hoja de datos.[7].

### **3.2.4. Programación de Arduino nano**

El Arduino Nano se puede programar con el software Arduino. Para realizar esta programación seleccione [Arduino Duemilanove o Nano / ATmega168] desde el menú de herramientas [Placa] (de acuerdo con el microcontrolador en su tablero), como podemos ver la en la fig.(3.6).

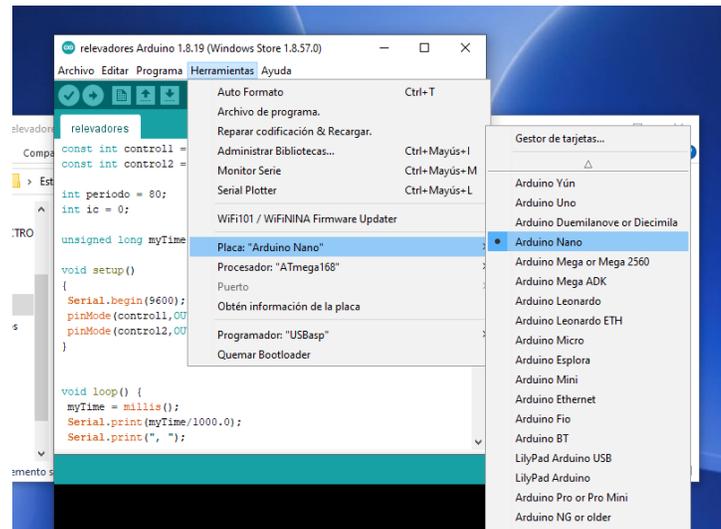


Figura 3.6: Configuración de la Placa Arduino Nano en el IDE

El Arduino Nano está diseñado de una manera que le permite ser restablecido por el software que se ejecuta en un ordenador conectado. El software de Arduino le permite cargar un código con sólo pulsar el botón de carga en el entorno Arduino. Esto significa que el gestor de arranque puede tener un tiempo de espera más corto. Esta configuración tiene otras implicaciones. Cuando el Nano está conectado ya sea a un ordenador con Mac OS X o Linux, se restablece cada vez que se realiza una conexión a la misma desde el software (a través de USB)[7].

### Distribución de pines en Arduino nano

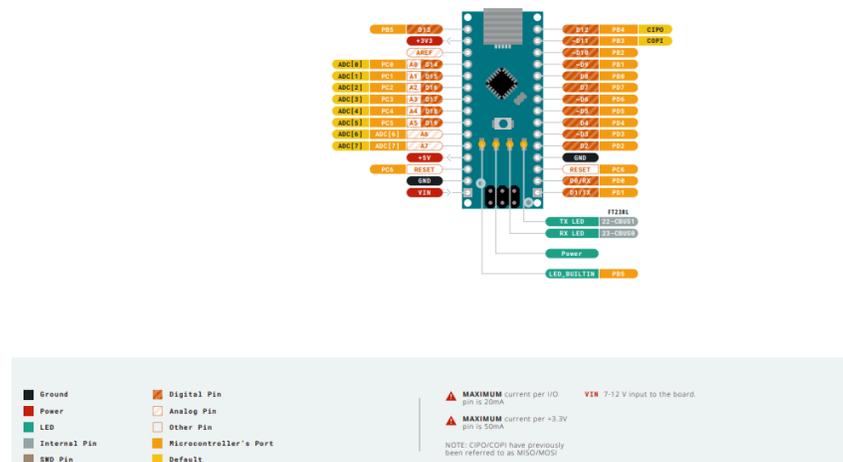


Figura 3.7: Diagrama que representa la configuración de pines I/O analógico digital, pwm, etc. de la placa Arduino Nano

**3.2.5. Arduino Mega2560**

El Arduino MEGA 2560 es una placa de desarrollo basada en el microcontrolador ATmega2560 (de aquí su nombre). Esta placa pertenece a la extensa familia de placas Arduino, siendo junto al Arduino UNO de las más representativas[8].

Como es costumbre en esta familia de placas, como el Arduino nano, el Arduino MEGA 2560 está compuesto, básicamente, por:

- Un microcontrolador (ATmega2560) con la configuración de “sistema mínimo” (El término “sistema mínimo” se refiere a que solo se utilizan los componentes indispensables para el microcontrolador).
- Una interfaz USB-Serie que permite re-programar dicho microcontrolador utilizando simplemente un ordenador, un cable USB y el software Arduino IDE.
- Y un conjunto de cabezales que permiten conectar los pines de entrada/salida, ya sea con los conocidos shields o con cualquier otro sistema externo.

**3.2.6. Características más importantes de Arduino mega2560**

- 256 kB de memoria FLASH (espacio disponible para almacenar el programa o sketch).
- 8 kB de memoria SRAM (es donde se crean las variables declaradas en el programa).
- 4 kB de memoria EEPROM (permite almacenar datos que se conserven aunque se reinicio o falle la alimentación).
- Frecuencia de CPU Máxima: 16MHz (esto lo explico más adelante).
- Voltaje de Operación máximo: 6.0V (aunque se recomienda no sobrepasar los 5V).

**3.2.7. Conector USB de Arduino mega2560**

El Arduino MEGA 2560 cuenta con un conector USB tipo B fig.(3.8) que puede ser utilizado para dos funciones:

- Alimentar la placa utilizando los 5 voltios proporcionados por el ordenador.
- Para cargar un sketch al microcontrolador utilizando la interfaz USB-Serie.



Figura 3.8: Imagen ilustrativa de entrada USB de la placa Arduino Mega 2560 [8].

### 3.2.8. Pines del Arduino MEGA 2560

El Arduino MEGA dispone de un total de 54 pines de entrada/salida digital. De esos pines 15 fig.( 3.9) pueden ser empleados como salidas analógicas.

También cuenta con 16 entradas analógicas (10 bits de resolución) denotadas A0, A1, . . . ,A15, que pueden ser utilizadas con sensores analógicos (como sondas de temperatura o humedad). En caso de no ser necesarios pueden ser utilizados como pines digitales.

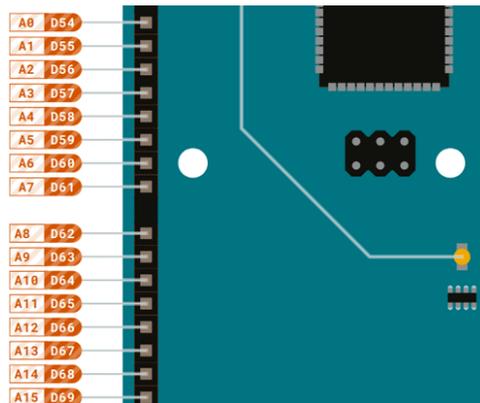


Figura 3.9: Imagen ilustrativa de entradas analógicas de la placa Arduino Mega 2560

Además de los pines digitales y analógicos, el Arduino MEGA 2560 también nos provee de pines para alimentar otros dispositivos a la hora de realizar un proyecto:

- GND: Pines de Tierra.
- 5V: Alimentación de 5 voltios para sensores u otros dispositivos a utilizar que formen parte de tu proyecto.
- 3V3: Este pin provee un voltaje de 3,3 voltios para dispositivos que así lo requieran (Puede suministrar hasta 150 mA, aunque es recomendable no sobrepasar los 50 mA).

- VIN: Permite alimentar la placa cuando esta no es alimentada utilizando el puerto USB . Este pin puede ser empleado para obtener el voltaje.

### 3.2.9. Programacion Arduino MEGA2560

La manera de programar el Arduino MEGA2560 es muy similar al comentado anteriormente con el Arduino nano. El Arduino MEGA2560 se puede programar con el software Arduino. Para realizar esta configuracion en necesario seleccionar [Arduino Mega o Mega 2560 / ATmega2560(Mega2560)] desde el menú Herramientas [Placa] como se muestra en la fig.(3.10).

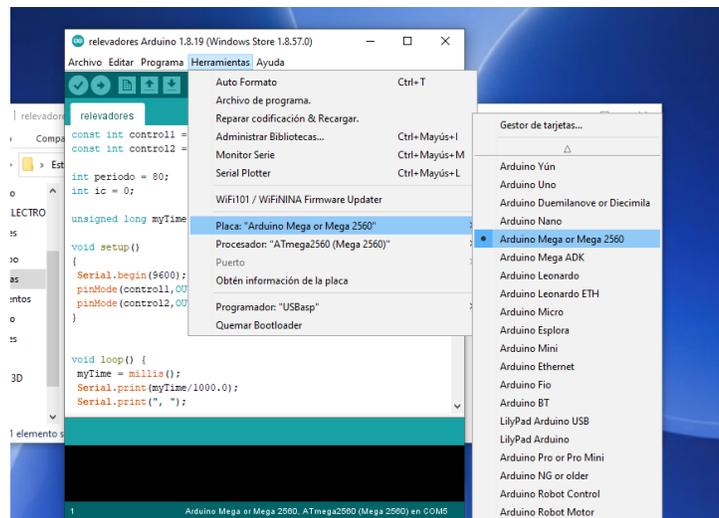


Figura 3.10: Configuración de la Placa Arduino Nano en el IDE

## 3.3. Módulo relay

Un relay fig. (3.11) es un interruptor mecánico operado eléctricamente que se puede encender o apagar, dejando pasar la corriente o no, y se puede controlar con voltajes bajos, como los 5V utilizados en la alimentación de un Arduino.

Controlar un módulo relay con el Arduino es lo mismo que controlar cualquier otra salida digital. El consumo de corriente de una de sus entradas es el mismo que se necesita para encender un led.

### 3.3.1. Conexiones del módulo de relay

En un relay los pines en el lado izquierdo del módulo relay controlan voltaje alto, y los pines en el lado derecho se conectan al componente que entrega bajo voltaje, como los pines digitales



Figura 3.11: Ilustración de Modulo Relay

de un Arduino u otro microcontrolador(figura 3.12).

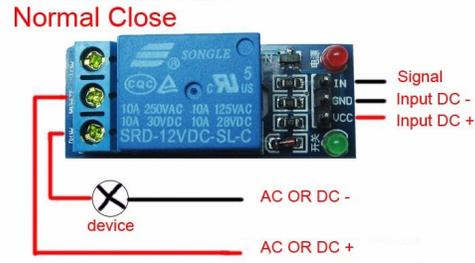


Figura 3.12: Ilustración de conexiones de Modulo Relay

Las conexiones entre el módulo relay y el Arduino son realmente simples:

- GND : va a común o “tierra” (lado negativo de la alimentación)
- Signal : controla el relay (se conectará a un pin digital Arduino)
- VCC : va a 5V

Controlar un módulo relay con el Arduino es tan simple como controlar una salida digital. Solo se deben enviar señales ALTAS o BAJAS utilizando un pin digital de Arduino, u otro microcontrolador o circuito digital. Con el módulo relay se pueden controlar casi todos los dispositivos caseros de corriente alterna (no solo lámparas)[9].

### 3.4. Diseño experimental

Nuestro diseño experimental se basa en el uso de microcontroladores arduino, utilizando el método de Angstrom, el cual consiste en calentar una varilla del material a nuestra elección por un extremo, aplicándole calor de forma periódica, mientras se deja enfriar libremente el

otro extremo. Gracias a esto la temperatura en un punto dado de la varilla realizará oscilaciones periódicas, aproximadamente armónicas, las cuales pueden relacionarse con la difusividad térmica.

Como pudimos ver anteriormente en la descripción de cada uno de los componentes, hacemos uso de dos tipos diferentes de arduino, los cuales nos ayudan automatizando completamente el experimento, así como para obtener oscilaciones periódicas de la manera más eficaz posible.

### 3.4.1. Colocación de varilla de aluminio y resistencia en disipadores de aluminio

Iniciamos usando nuestra varilla rectangular de aluminio de 23 cm colocando en contacto con uno de sus extremos la resistencia de 110 volts y a su vez dos disipadores de aluminio en los extremos de la barra, ajustados con dos tornillos, como se muestra en la fig.(3.13).

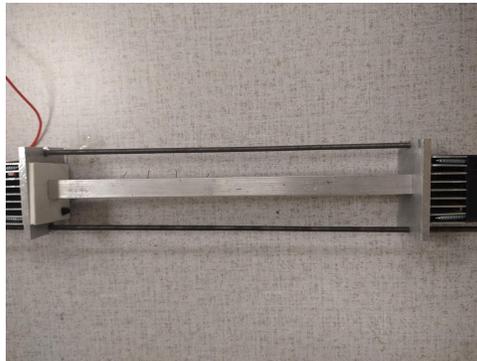


Figura 3.13: Varilla de aluminio sostenida por disipadores.

Este tipo de ajuste nos ayuda a no utilizar ningún tipo de adhesivo, asegurándonos que el contacto térmico no sea influido por algún agente externo al sistema.

### 3.4.2. Distribución de sensores LM35

Ahora, a lo largo de nuestra varilla de aluminio, colocamos sensores de temperatura LM35 a distancias diferentes, cada uno con 1.9 cm de separación aproximadamente fig. (3.14), teniendo en cuenta que el primer LM35 colocado será el más cercano posible a la resistencia actuando como posición origen o  $x = 0$  (usar preferentemente pasta térmica para pegar los sensores LM35 a la barra). Cabe mencionar que también se coloca un sensor de temperatura extra en la resistencia para monitorear el comportamiento de la temperatura. Esto nos ayuda a verificar el buen funcionamiento de la resistencia. La cantidad de LM35 colocados en la varilla de aluminio

es de 13, sin tomar en cuenta el sensor colocado en la resistencia.



Figura 3.14: Ilustración de sensores LM35 colocados en varilla de aluminio.

### 3.4.3. Programación de Arduino MEGA2560 para sensores LM35

Las lecturas de estos sensores son monitoreadas y asimiladas por el instrumento Arduino mega2560. Este Arduino es manipulado por un el programa ilustrado en la fig. (3.15)(para un solo sensor):

```
sketch_aug23a Arduino 1.8.19 (Windows Store 1.8.57.0)
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda
sketch_aug23a $
// Declaracion de variables globales
float tempC0;
// Variable para almacenar el valor obtenido del sensor (0 a 1023)
unsigned long myTime;
// Variable del pin de entrada del sensor (A0)
void setup() {
  // Configuramos el puerto serial a 9600 bps
  Serial.begin(9600);
}
void loop() {
  myTime=millis();
  // Con analogRead leemos el sensor, recuerda que es un valor de 0 a 1023
  tempC0= analogRead(0);

  // Calculamos la temperatura con la fórmula
  tempC0= (5.0 * tempC0* 100.0)/1024.0;

  // Envia el dato al puerto serial
  Serial.print(tempC0);
  Serial.print(" ");

  // Salto de línea
  Serial.print("\n");
  // Esperamos un tiempo para repetir el loop
  delay(1000);
}
```

Figura 3.15: Código de programación para Arduino en sensor de temperatura LM35.

Con esta información, podemos configurar el código para el número de sensores que sean necesarios para nuestro experimento.

#### 3.4.4. Conexiones de sensores LM35 a Arduino MEGA2560

La conexión de los LM35 a Arduino MEGA2560 para la recolección de datos es muy sencilla. Anteriormente en el punto 3.1.4.4 se explicó la distribución de los pines para este sensor, y de igual manera, en el punto 3.1.5.10 se ilustran las conexiones del Arduino MEGA2560. Sabiendo esto podemos tener una idea clara de cómo realizar este procedimiento. Conectamos el pin VCC del LM35 a la toma de corriente VCC de 5 V, el pin GND del LM35 al GND indicado en el Arduino MEGA2560, y para el pin OUT del LM35 hacemos la conexión en la entrada analógica indicada como A0, como podemos ver en la fig. (3.16):

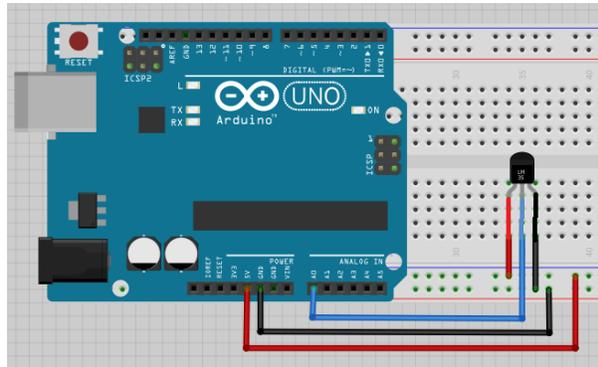


Figura 3.16: Ilustración de conexión Arduino MEGA2560 con sensor de temperatura LM35

Podemos hacer esto para cada uno de los sensores de temperatura LM35 que queramos colocar a lo largo de la barra, usando como herramienta una protoboard para tener acceso a la toma de VCC y GND en cada uno de los sensores y usando consecutivamente las entradas analógicas del Arduino MEGA2560. Es importante tener en cuenta la posición de cada sensor en el Arduino, ya que así podremos ubicar más rápidamente un posible fallo en las conexiones o en el sensor.

#### 3.4.5. Alimentación de la resistencia de cerámica cubierta de aluminio

Ahora, nuestra resistencia es alimentada por una fuente de 110 V, la cual podría ser la conexión directa al tomacorriente de casa. Dicha fuente está conectada a la resistencia y a su vez también a un módulo relay, el cual tiene la función de interruptor de corriente. Este instrumento puede ser manipulado con Arduino. La conexión se ilustra en la fig. (3.17):

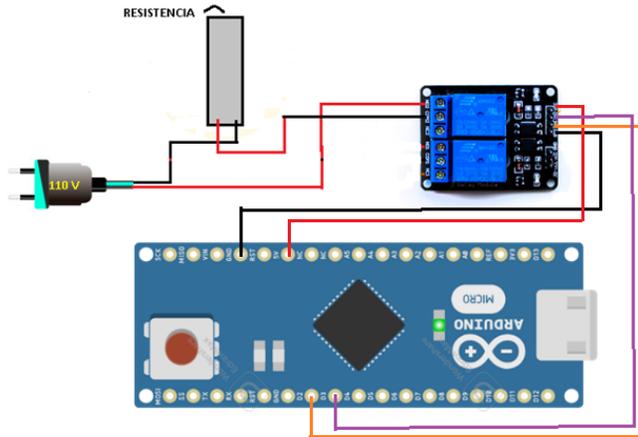


Figura 3.17: Conexión de fuente110V-Resistencias-RelayDoble-ArduinoNano.

### 3.4.6. Código de configuración Arduino-Relay

De igual forma que en el caso anterior con los sensores LM35, para el módulo relay el Arduino también debe ser configurado por un código fig.(3.18) para funcionar como transmisor de información con el fin de encender y apagar la resistencia con un periodo establecido en dicho código.

```

k Arduino 1.8.19 (Windows Store 1.8.57.0)
Archivo Editar Programa Herramientas Ayuda
k$
const int controll = 2; //reley 1
const int control2 = 3; //reley 2

int periodo = 160; //periodo tomado en segundos
int ic = 0;

unsigned long myTime;

void setup()
{
  Serial.begin(9600);
  pinMode(controll,OUTPUT);
  pinMode(control2,OUTPUT);
}

void loop() {
  myTime = millis();
  Serial.print(myTime/1000.0);
  Serial.print(" ");

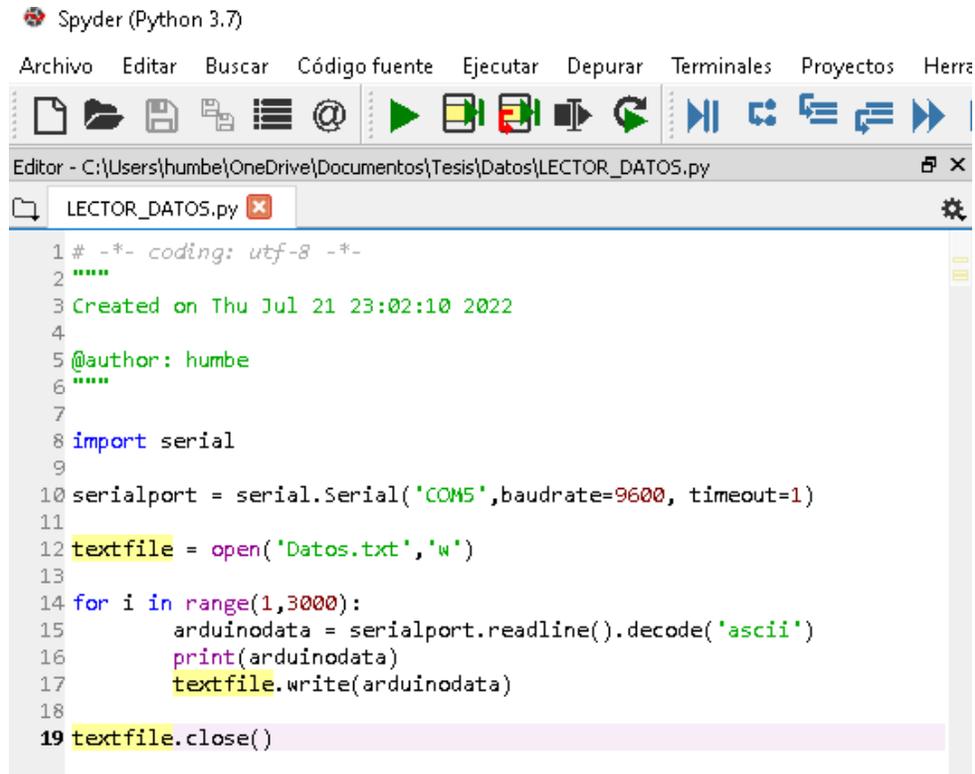
  if (ic < periodo/2)
  {
    digitalWrite(controll,HIGH);
    digitalWrite(control2,LOW);
    Serial.print(ic);
    Serial.print(",110V ");
    Serial.print(HIGH);
    Serial.print(", 12 V ");
    Serial.print(LOW);
    Serial.print("\n");
  }
  if (ic >= periodo/2)
  {
    digitalWrite(controll,LOW);
    digitalWrite(control2,HIGH);
    Serial.print(ic);
    Serial.print(",110V ");
    Serial.print(LOW);
    Serial.print(", 12 V ");
    Serial.print(HIGH);
    Serial.print("\n");
  }
  delay(1000);
  ic = ic+1;
  if(ic=periodo)ic=0;
}

```

Figura 3.18: Código relay doble en Arduino.

### 3.4.7. Obtención de datos de Arduino

Los datos obtenidos por el Arduino mega2560 y los sensores LM35 son asimilados en tiempo real por nuestro equipo de cómputo usando el lenguaje de programación python para crear un archivo txt, el cual usaremos para el análisis de datos. Podemos ver un ejemplo del código python para la toma de datos en la fig.( 3.19).



```
1 # -*- coding: utf-8 -*-
2 *****
3 Created on Thu Jul 21 23:02:10 2022
4
5 @author: humbe
6 *****
7
8 import serial
9
10 serialport = serial.Serial('COM5',baudrate=9600, timeout=1)
11
12 textfile = open('Datos.txt','w')
13
14 for i in range(1,3000):
15     arduinodata = serialport.readline().decode('ascii')
16     print(arduinodata)
17     textfile.write(arduinodata)
18
19 textfile.close()
```

Figura 3.19: Código python para leer los datos de Arduino

## 3.5. Datos obtenidos:

Haciendo uso de la herramienta de programación JupyterNotebook, la cual se desarrolla en lenguaje python, elaboramos un programa en el cual podemos realizar nuestro ajuste teórico-experimental. Principalmente podemos conseguir una gráfica de los datos obtenidos experimentalmente, tomando en cuenta los primeros 12 sensores de temperatura LM35:

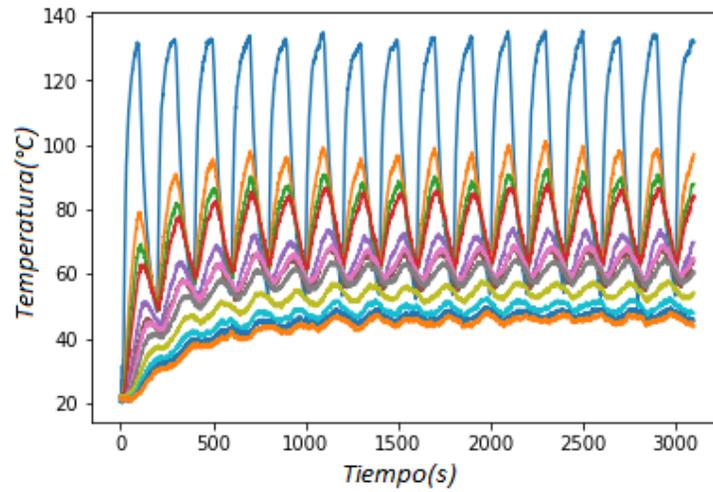


Figura 3.20: Gráfica de datos obtenidos en el experimento

Tomamos en consideración solamente los primeros 12 sensores, ya que podemos notar a simple vista en la fig.(3.20) que la oscilación de ondas térmicas va en decaimiento, por lo que se deja de apreciar la variación de temperatura.

# Capítulo 4 | *Análisis Teórico-Experimental*

## 4.1. Análisis Teórico-Experimental

Este capítulo tiene como objetivo hacer una determinación de la difusividad térmica a partir de nuestros datos experimentales. La difusividad térmica se determina midiendo la temperatura con varios detectores cuando en un extremo de la varilla aplicamos una temperatura oscilante.

Si inicialmente queremos encontrar una función que describa el punto más cercano a la resistencia ( $x = 0$ ), tomando en cuenta lo visto anteriormente la solución general de la ecuación de calor es:

$$\begin{aligned}
 T(x, t) = & \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ a_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \right] e^{-in\omega_0 t} \\
 & + [\alpha_0 + \alpha_1 x] \\
 & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[ a_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \right] e^{in\omega_0 t}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Podemos notar que nuestra solución general incluye términos exponenciales, donde  $e^{(1-i)(x/d_n)}$  crece exponencialmente y  $e^{-(1-i)(x/d_n)}$  decrece.

Analizando nuestro sistema aplicando nuestras condiciones de frontera, tenemos:

$$a_{-n}^+ = a_n^+ = 0 \tag{4.2}$$

Esto se debe por que para cualquier posición  $x > 0$  la temperatura decrece.

Podemos escribir la ecuación (4.1) excluyendo los términos con exponencial positivo:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} e^{-in\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} e^{in\omega_0 t} \tag{4.3}$$

Teniendo esto podemos considerar la posición en  $x = 0$ :

$$T(0, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{-n}^- e^{-in\omega_0 t} + \alpha_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^- e^{in\omega_0 t} \tag{4.4}$$

Limitamos la sumatoria para  $n = 1$ , tal que:

$$T(0, t) = a_{-1}^- e^{-in\omega_0 t} + \alpha_0 + a_1^- e^{i\omega_0 t} \quad (4.5)$$

Identificamos las variables:

$$a_1^- = \frac{\Delta t}{4i} \quad (4.6)$$

$$a_{-1}^- = \frac{-\Delta t}{4i} \quad (4.7)$$

$$\alpha_0 = \langle T(0, t) \rangle \quad (4.8)$$

Entonces, podemos reescribir la ecuación 4.5 de la siguiente manera:

$$T(0, t) = \alpha_0 + \frac{\Delta t}{4i} e^{i\omega_0 t} + \frac{-\Delta t}{4i} e^{-i\omega_0 t} \quad (4.9)$$

Agrupamos términos exponenciales:

$$= \alpha_0 + \frac{\Delta t}{2i} \left( \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2} \right) \quad (4.10)$$

Usando la identidad de los exponentes, podemos escribir (4.10) como:

$$T(0, t) = \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta t}{2} \text{sen}(\omega_0 t) \quad (4.11)$$

Esta es nuestra ecuación para determinar la temperatura en  $x = 0$ , al gráficar podemos ver la siguiente figura:

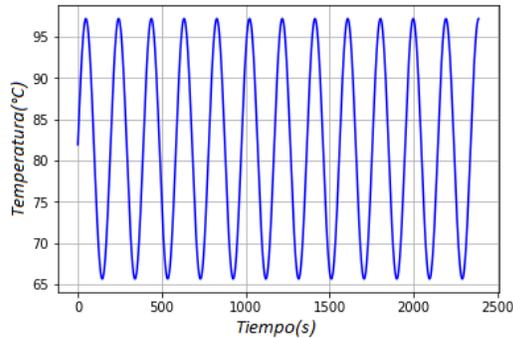


Figura 4.1: Gráfica de datos teóricos obtenidos para la posición  $x = 0$

Si queremos encontrar la temperatura en cualquier posición  $x > 0$  partimos de la ecuación (4.12):

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} e^{-in\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} e^{in\omega_0 t} \quad (4.12)$$

Haciendo nuevamente para  $n = 1$

$$T(x, t) = a_{-1}^- e^{-(1-i)(x/d_1)} e^{-i\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] + a_1^- e^{-(1+i)(x/d_1)} e^{i\omega_0 t} \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta los valores en las ecuaciones (4.6), (4.7) y (6.8), reescribimos (4.13) de la siguiente manera:

$$T(x, t) = \frac{\Delta t}{4i} e^{-(1-i)(x/d_1)} e^{-i\omega_0 t} + [\langle T(0, t) \rangle + \alpha_1 x] + \frac{-\Delta t}{4i} e^{-(1+i)(x/d_1)} e^{i\omega_0 t} \quad (4.14)$$

Y agrupamos términos exponenciales:

$$T(x, t) = \frac{\Delta t}{4i} e^{(-x/d_1)} e^{[i\omega_0 t - i(x/d_1)]} + [\langle T(0, t) \rangle + \alpha_1 x] + \frac{-\Delta t}{4i} e^{(-x/d_1)} e^{[-i\omega_0 t + i(x/d_1)]} \quad (4.15)$$

Donde:

$$\frac{e^{[i\omega_0 t - i(x/d_1)]} - e^{[-i\omega_0 t + i(x/d_1)]}}{2} = \text{Sen}[\omega_0 t - i(x/d_1)] \quad (4.16)$$

Entonces la ecuación (4.15) queda como:

$$T(x, t) = \langle T(0, t) \rangle + \alpha_1 x + \frac{\Delta t}{2} e^{(-x/d_1)} \text{Sen}[\omega_0 t - (x/d_1)] \quad (4.17)$$

Definimos a  $\langle T(x, t) \rangle = \langle T(0, t) \rangle + \alpha_1 x$ , tal que:

$$\alpha_1 = \frac{\langle T(x, t) \rangle - \langle T(0, t) \rangle}{x} \quad (4.18)$$

Sustituimos en (4.12):

$$T(x, t) = \langle T(x, t) \rangle + \frac{\Delta t}{2} e^{(-x/d_1)} \text{Sen}[\omega_0 t - (x/d_1)] \quad (4.19)$$

Y así, tenemos como resultado nuestra función que describe la temperatura en la barra de aluminio en cualquier posición.

Ya hemos encontrado las ecuaciones de temperatura las cuales podremos usar para realizar nuestro ajuste teórico-experimental. Gracias a esto podemos realizar una comparativa de los datos experimentales con los obtenidos analíticamente. Utilizando nuevamente la herramienta de programación JupyterNotebook, podemos realizar nuestro análisis teórico para encontrar la difusividad térmica.

En la fig. (4.2) mostramos las oscilaciones de temperatura para cuando el sistema ha alcanzado un estado estacionario. Mostramos la variación de la temperatura como función del tiempo para sensores de temperatura en diferentes posiciones. En colores negro, azul, rojo, cian, magenta y amarillo tenemos los detectores en  $x = 0, 1.9 \text{ cm}, 3.8 \text{ cm}, 5.7 \text{ cm}, 7.6 \text{ cm}$  y  $9.5 \text{ cm}$ . La posición  $x = 0$  define un extremo de la barra, en donde se coloca la fuente de calor oscilatoria. Observamos que a medida que nos alejamos del extremo de la barra en donde está la fuente de calor oscilante, la temperatura promedio se reduce.

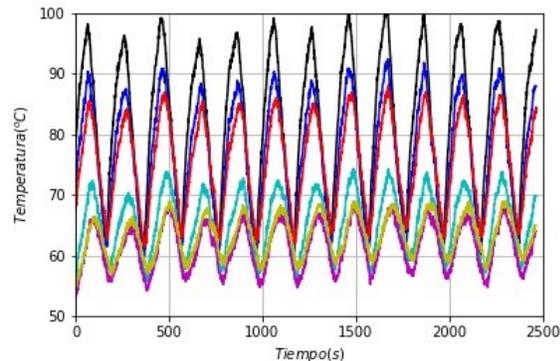


Figura 4.2: Variación de la temperatura como función del tiempo para sensores de temperatura en diferentes posiciones.

Consideremos primeramente la gráfica para la posición en  $x = 0$ . En ese punto la temperatura se ajusta a la ecuación (4.11), vista anteriormente:

$$T(0, t) = \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} \sin(\omega_0 t)$$

En la fig. (4.4) mostramos la gráfica experimental y el ajuste teórico que hemos hecho para este caso en que  $x = 0$ . Los puntos en color negro son los datos experimentales y la curva continua en rojo es el ajuste teórico. Hemos encontrado que la temperatura promedio es  $\langle T(0, t) \rangle = 81.39$ , la amplitud de las oscilantes tiene un valor  $\Delta T = 31.98 \text{ }^\circ\text{C}$  y la frecuencia angular es

$\omega_0 = 0.0312 \text{ rad/s}$ , lo que equivale a un periodo  $\tau_0 = 200.85 \text{ s}$ .

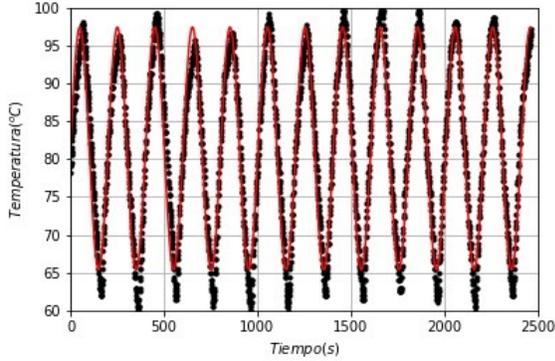


Figura 4.3: Temperatura oscilante para el caso en que  $x = 0$ . Los valores experimentales y teóricos se muestran colores negro y rojo, respectivamente.

Para el caso en que  $x > 0$ , tenemos que la temperatura se define como lo vimos en la ecuación (4.19):

$$T(x, t) = \langle T(x, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} e^{-x/d_1} \sin\left(\omega_0 t - \frac{x}{d_1}\right)$$

En esta ecuación tenemos varios parámetros experimentales y una sola incógnita. Los parámetros experimentales son los siguientes:  $T(x, t)$ , es la temperatura del termómetro como una función de la posición y del tiempo;  $\Delta T$  es la amplitud de la oscilación de temperatura definida para  $x = 0$ . finalmente,  $\omega_0$  es la frecuencia de oscilación que ya ha sido obtenida. La variable que falta por determinar es  $d_1$ . En la Fig. 2 mostramos el ajuste que obtuvimos utilizando la librería SciPy en Python. En puntos azules tenemos los datos experimentales para  $x = 1$  y en línea roja tenemos el ajuste teórico. El valor que obtuvimos fue  $d = 0.074$ . Mediante la relación:

$$D = \frac{\omega_0 d^2}{2} \quad (4.20)$$

Obtenemos que experimentalmente, tenemos el valor  $D = 86.73 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ . Esta estrategia para determinar la difusividad nos permite obtener un valor de difusividad para cada valor de  $x$  en donde tenemos un sensor de temperatura. En todas los valores de  $x$  hemos obtenido valores similares para la difusividad  $D$ .

Existe otra estrategia que permite obtener la difusividad mediante una fórmula analítica. Para obtener  $d_1$  en una forma analítica planteamos:

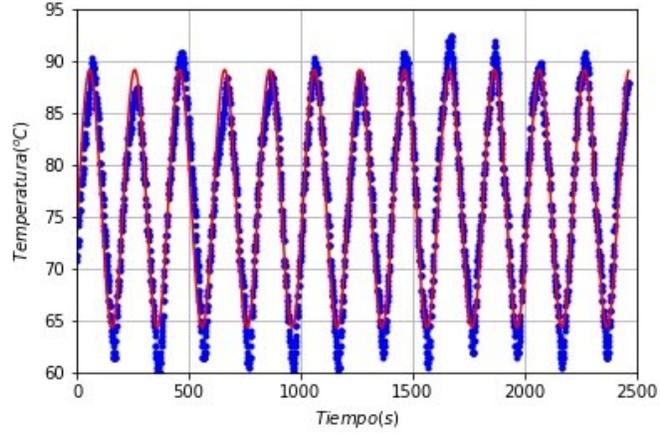


Figura 4.4: Ajuste teórico (línea roja) de los datos experimentales (puntos azules) obtenidos en el punto  $x = 0$ .

$$T(x_1, t_\alpha) = \langle T(x_1, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} e^{-x_1/d_1} \quad (4.21)$$

$$T(x_2, t_\alpha) = \langle T(x_2, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} e^{-x_2/d_1} \quad (4.22)$$

$$\frac{T(x_1, t_\alpha) - \langle T(x_1, t_\alpha) \rangle}{T(x_2, t_\alpha) - \langle T(x_2, t_\alpha) \rangle} = \frac{e^{-\frac{x_1}{d_1}}}{e^{-\frac{x_2}{d_1}}} \quad (4.23)$$

$$\frac{T(x_1, t_\alpha) - \langle T(x_1, t_\alpha) \rangle}{T(x_2, t_\alpha) - \langle T(x_2, t_\alpha) \rangle} = e^{\frac{x_2 - x_1}{d_1}} = \phi \quad (4.24)$$

$$\ln \phi = \frac{x_2 - x_1}{d_1} \quad (4.25)$$

$$d_1 = \frac{x_2 - x_1}{\ln \phi} \quad (4.26)$$

Haciendo este análisis hemos obtenido  $d = 0.07446$ , al cual le corresponde un valor de  $D = 86.68 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ .

En la fig. (4.5) mostramos una comparación de los datos experimentales con la curva teórica de la temperatura. Mostramos cuatro paneles con diferentes tiempos,  $t = 60, 100, 160$  y  $200$  s. En cada uno de los paneles, mostramos con círculos de color negro, azul, verde, rojo, cian, magenta y amarillo las posiciones para  $x = 0, 1.9, 3.8, 5.7, 7.6$  y  $9.5\text{cm}$ , respectivamente. También mostramos con cuadros negros la temperatura correspondiente a las posiciones  $11.4, 13.3, 15.2$  y  $17.1$ . observamos que existe una buena relación entre los datos experimentales y teóricos.

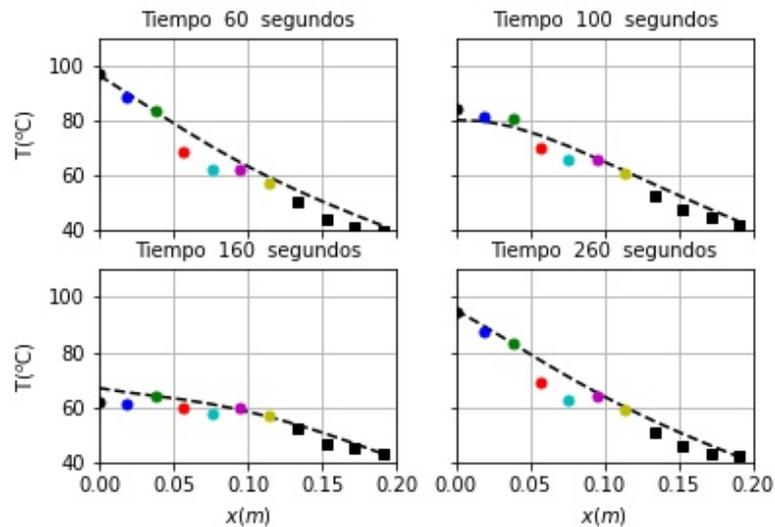


Figura 4.5: Gráfica de difusividad térmica

# Capítulo 5

Oscilación en ambos extremos

## 5.1. Fuente de calor oscilante en ambos extremos

En este capítulo analizaremos el fenómeno de interferencia térmica que existe cuando aplicamos una fuente de temperatura oscilante en ambos extremos. En este caso, a diferencia de lo obtenido anteriormente, debemos construir una nueva función, la cual nos describa el comportamiento de la temperatura en ambos extremos.

## 5.2. La fuente de calor oscilante

### 5.2.1. Caso para $x = 0$

Definimos una fuente de calor  $l(t)$  como:

$$l(t) = T(x = 0, t) \quad (5.1)$$

Experimentalmente, se encuentra que la temperatura tiene la siguiente función:

$$T(x = 0, t) = \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} \sin(\omega_0 t + \phi_l) \quad (5.2)$$

donde

$$\langle T(0, t) \rangle = \frac{T_h + T_l}{2} \quad (5.3)$$

y

$$\Delta T = T_h - T_l \quad (5.4)$$

donde  $T_h$  y  $T_l$  es la temperatura máxima y mínima de la oscilación.

Es conveniente escribir, lo siguiente:

$$T(0, t) = \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 t + \phi_l)} - e^{-i(\omega_0 t + \phi_l)}}{2i} \right] \quad (5.5)$$

$$T(0, t) = -\frac{\Delta T e^{-i\phi_l}}{4i} e^{-i\omega_0 t} + \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta T e^{i\phi_l}}{4i} e^{i\omega_0 t} \quad (5.6)$$

### 5.2.2. Caso para $x = d$

La condición de frontera en este extremo de la varilla es:

$$r(t) = T(x = d, t) \quad (5.7)$$

Identificamos ambos lados de esta ecuación de la siguiente manera:

$$T(x = d, t) = \langle T(d, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} \sin(\omega_0 t + \phi_r) \quad (5.8)$$

Es conveniente escribir de la siguiente manera:

$$T(d, t) = \langle T(d, t) \rangle + \frac{\Delta T}{2} \left[ \frac{e^{i(\omega_0 t + \phi_r)} - e^{-i(\omega_0 t + \phi_r)}}{2i} \right] \quad (5.9)$$

$$T(d, t) = -\frac{\Delta T e^{-i\phi_r}}{4i} e^{-i\omega_0 t} + \langle T(d, t) \rangle + \frac{\Delta T e^{i\phi_r}}{4i} e^{i\omega_0 t} \quad (5.10)$$

## 5.3. Aplicación de condiciones de frontera

### 5.3.1. Caso para $x = 0$

Sí consideramos la solución general de  $T(x, t)$  tomando solamente el término  $n = 1$  tenemos:

$$[a_{-1}^+ + a_{-1}^-] e^{-i\omega_0 t} + \alpha_0 + [a_1^+ + a_1^-] e^{i\omega_0 t} = -\frac{\Delta T e^{-i\phi_l}}{4i} e^{-i\omega_0 t} + \langle T(0, t) \rangle + \frac{\Delta T e^{i\phi_l}}{4i} e^{i\omega_0 t} \quad (5.11)$$

Esta relación plantea estas tres ecuaciones sobre los coeficientes.

$$a_{-1}^+ + a_{-1}^- = -\frac{\Delta T e^{-i\phi_l}}{4i} \quad (5.12)$$

$$\alpha_0 = \langle T(0, t) \rangle \quad (5.13)$$

$$a_1^+ + a_1^- = \frac{\Delta T e^{i\phi_l}}{4i} \quad (5.14)$$

5.3.2. Caso para  $x = d$ 

Aplicamos la condición de frontera en  $x = d$  para tener:

$$\begin{aligned} & \left[ a_{-1}^+ e^{(1-i)(d/d_1)} + a_{-1}^- e^{-(1-i)(d/d_1)} \right] e^{-i\omega_0 t} + \\ & [\alpha_0 + \alpha_1 d] + \left[ a_1^+ e^{(1+i)(d/d_1)} + a_1^- e^{-(1+i)(d/d_1)} \right] e^{i\omega_0 t} = \\ & -\frac{\Delta T e^{-i\phi_r}}{4i} e^{-i\omega_0 t} + \langle T(d, t) \rangle + \frac{\Delta T e^{i\phi_r}}{4i} e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (5.15)$$

La condición de frontera impone tres relaciones:

$$a_{-1}^+ e^{(1-i)(d/d_1)} + a_{-1}^- e^{-(1-i)(d/d_1)} = -\frac{\Delta T e^{-i\phi_r}}{4i} \quad (5.16)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 d = \langle T(d, t) \rangle \quad (5.17)$$

$$a_1^+ e^{(1+i)(d/d_1)} + a_1^- e^{-(1+i)(d/d_1)} = \frac{\Delta T e^{i\phi_r}}{4i} \quad (5.18)$$

## 5.4. Determinación de coeficientes

5.4.1. Caso para  $e^{-i\omega_0 t}$ 

Para las ondas oscilando con  $e^{-i\omega_0 t}$  planteamos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(1-i)(d/d_1)} & e^{-(1-i)(d/d_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1}^+ \\ a_{-1}^- \end{bmatrix} = -\frac{\Delta T}{4i} \begin{bmatrix} e^{-i\phi_l} \\ e^{-i\phi_r} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Para encontrar la inversa de una matriz  $A$  de la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

Usamos la formula:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Para poder escribir lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(1-i)(d/d_1)} & e^{-(1-i)(d/d_1)} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{-(1-i)(d/d_1)} - e^{(1-i)(d/d_1)}} \begin{bmatrix} e^{-(1-i)(d/d_1)} & -1 \\ -e^{(1-i)(d/d_1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

De esta forma tenemos:

$$\begin{bmatrix} a_{-1}^+ \\ a_{-1}^- \end{bmatrix} = -\frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1-i)(d/d_1)} - e^{(1-i)(d/d_1)}} \begin{bmatrix} e^{-(1-i)(d/d_1)} & -1 \\ -e^{(1-i)(d/d_1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\phi_l} \\ e^{-i\phi_r} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Así obtenemos:

$$a_{-1}^+ = -\frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1-i)(d/d_1)} - e^{(1-i)(d/d_1)}} [e^{-(1-i)(d/d_1)} e^{-i\phi_l} - e^{-i\phi_r}] \quad (5.24)$$

$$a_{-1}^- = -\frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1-i)(d/d_1)} - e^{(1-i)(d/d_1)}} [-e^{(1-i)(d/d_1)} e^{-i\phi_l} + e^{-i\phi_r}] \quad (5.25)$$

#### 5.4.2. Coeficientes no oscilatorios

Para el caso de los términos no oscilatorios, tenemos el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

A través de la matriz inversa del lado izquierdo, planteamos la relación:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} d & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_0 \\ r_0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Así tenemos:

$$\alpha_0 = \langle T(0, t) \rangle \quad (5.28)$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle T(d, t) \rangle - \langle T(0, d) \rangle}{d} \quad (5.29)$$

#### 5.4.3. Caso para $e^{i\omega_0 t}$

Para las ondas oscilando con  $e^{i\omega_0 t}$  planteamos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(1+i)(d/d_1)} & e^{-(1+i)(d/d_1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^+ \\ a_1^- \end{bmatrix} = \frac{\Delta T}{4i} \begin{bmatrix} e^{i\phi_l} \\ e^{i\phi_r} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{(1+i)(d/d_1)} & e^{-(1+i)(d/d_1)} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{e^{-(1+i)(d/d_1)} - e^{(1+i)(d/d_1)}} \begin{bmatrix} e^{-(1+i)(d/d_1)} & -1 \\ -e^{(1+i)(d/d_1)} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Usando esta matriz inversa, se obtiene la siguiente relación para los coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_1^+ \\ a_1^- \end{bmatrix} = \frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1+i)(d/d_1)} - e^{(1+i)(d/d_1)}} \begin{bmatrix} e^{-(1+i)(d/d_1)} & -1 \\ -e^{(1+i)(d/d_1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\phi_l} \\ e^{i\phi_r} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

$$a_1^+ = \frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1+i)(d/d_1)} - e^{(1+i)(d/d_1)}} [e^{-(1+i)(d/d_1)} e^{i\phi_l} - e^{i\phi_r}] \quad (5.33)$$

$$a_1^- = \frac{\Delta T}{4i} \frac{1}{e^{-(1+i)(d/d_1)} - e^{(1+i)(d/d_1)}} [-e^{(1+i)(d/d_1)} e^{i\phi_l} + e^{i\phi_r}] \quad (5.34)$$

## 5.5. Ecuación de temperatura para la varilla

Tomando en cuenta los coeficientes anteriormente obtenidos, planteamos que la función que determina la temperatura en la varilla es:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \left[ a_{-1}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + a_{-1}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \right] e^{-i\omega_0 t} \\ & + [\alpha_0 + \alpha_1 x] \\ & + \left[ a_1^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + a_1^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \right] e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$

## 5.6. Resultados para el caso fuentes en fase

En la fig. (5.1) mostramos la variación de la temperatura como una función de la posición para el caso en que las fuentes en ambos extremos están en fase. El periodo de la oscilación es  $\tau = 200$  s. Se muestran cuatro paneles con los casos de  $t=0, 161, 180$  y  $218$  segundos.

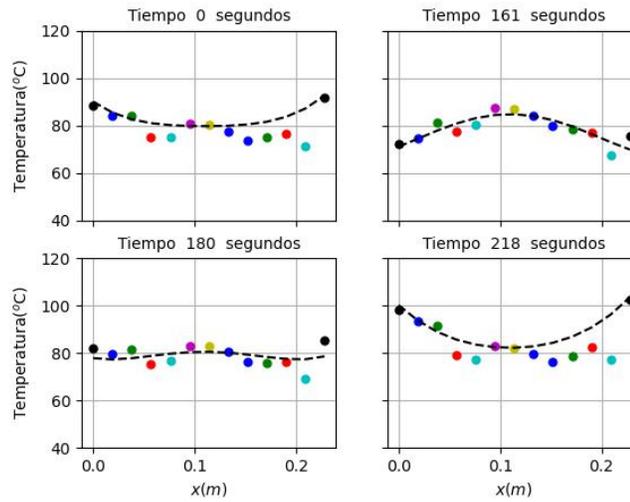


Figura 5.1: Datos experimentales en fase comparados con los obtenidos teóricamente en diferentes tiempos.

Observamos que existe una buena relación entre los datos experimentales y la curva teórica.

En la fig. (5.2) mostramos la temperatura como función del tiempo.

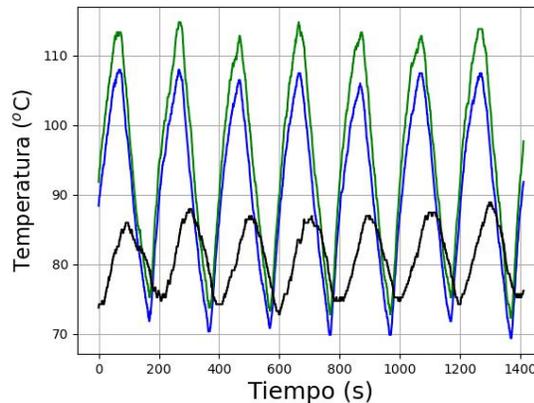


Figura 5.2: Datos experimentales en una oscilación en fase de ambos extremos.

En líneas azul y verde mostramos la temperatura en  $x = 0$  y  $x = d$ . La línea negra es la temperatura en el centro de la varilla,  $x = 11 \text{ cm}$ . Se observa que cuando las fuentes están en fase, tenemos una oscilación de temperatura en el centro de la varilla.

## 5.7. Resultados para el caso fuera de fase

En la fig. (5.3) mostramos la variación de la temperatura para el caso en que las fuentes están fuera de fase. Se muestran cuatro paneles que corresponden a los tiempos 164, 210, 260 y 330 segundos.

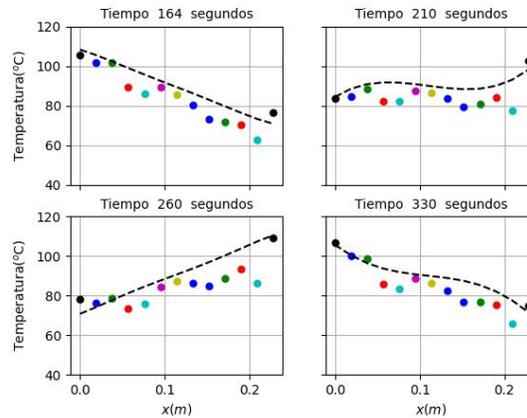


Figura 5.3: Datos experimentales en una oscilación en fase de ambos extremos.

En la fig. (5.4) mostramos la temperatura en función del tiempo.

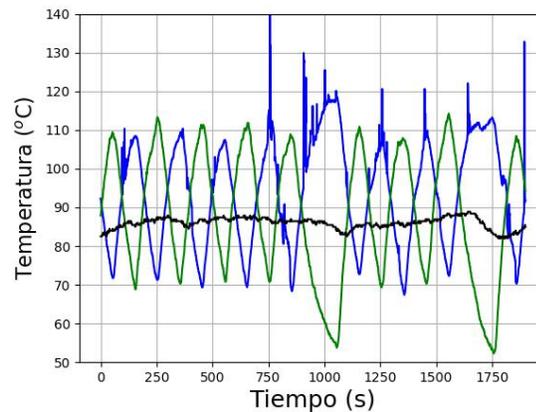


Figura 5.4: Datos experimentales en desfase comparados con los obtenidos teóricamente en diferentes tiempos.

En líneas azul y verde mostramos la temperatura en  $x = 0$  y  $x = d$ . La línea negra es la temperatura en el centro de la varilla,  $x = 11 \text{ cm}$ . Se observa que cuando las fuentes están en fuera de fase, no tenemos oscilación de temperatura en el centro de la varilla.

Observamos que existe una buena relación entre los datos experimentales y la curva teórica.

## *Conclusiones*

Este proyecto de tesis nos dio la oportunidad de comprender cómo evoluciona la temperatura en una barra como una función del espacio y del tiempo, cuando existe una fuente de calor periódica. Las oscilaciones de temperatura están determinadas por la ecuación de calor y sujetas a las condiciones de frontera.

Desde el punto de vista experimental, desarrollamos un experimento usando arduino que nos permite controlar tanto la fuente de calor oscilante, como la lectura de los detectores de temperatura. La captura de datos fue realizada directamente en Python usando programas propios. Para la realización de este experimento no usamos ningún equipo de la universidad, sino que poco a poco fuimos adquiriendo los elementos necesarios. Afortunadamente, la tecnología arduino es de bajo precio comercial, pero al mismo tiempo de gran valor pedagógico, ya que hacer funcionar toda la electrónica implica un buen entendimiento de las componentes.

Desde el punto de vista teórico, consideramos que es valioso entender la existencia de ondas térmicas como un fenómeno que puede ser explicado en término de series de Fourier. Presentamos una solución general para la temperatura como función del espacio y del tiempo que puede ser aplicado a cualquier tipo de condiciones de frontera periódicas que tenga la barra en ambos extremos. La idea de desarrollar esta nueva forma de solución general fue no solamente aplicarla a los casos en donde exista un calentamiento en un lado de la barra. Nuestra idea es que nuestra formulación teórica pueda ser aplicada a diferentes tipos de fenómenos de interferencia en una barra, como por ejemplo la superposición de ondas térmicas cuando ambos extremos se calientan simultáneamente, o bien la reflexión de ondas térmicas cuando tengamos una barra compuesta de dos o más materiales.

Finalmente, pensamos que es este trabajo puede dar lugar a diferentes posibilidades académicas. Como un primer ejemplo, es posible proponer un aparato que permita medir la difusividad por medio de ondas térmicas. Como un segundo ejemplo, creemos que podemos plantear nuevas prácticas de laboratorio en donde podamos estimular a estudiantes por el interés en fenómenos ondulatorios.

# Bibliografía

- [1] Bodas, A., Gandía, V., López-Baeza, E. (1998). An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves. *American Journal of Physics*, 666528533.
- [2] Sabieh Anwar, M., Alam, J., Wasif, M., Ullah, R., Shamim, S., Zia, W. (2014). Fourier analysis of thermal diffusive waves. *American Journal of Physics*, 82(10), 928-933.
- [3] The london, Edinburgh and Dublin philosophical magazine and journal of science. (1863). En Ångstrom on a New Method of determining the Thermal Conductivity of Bodies (1.a ed., Vol. 25). University of Mississippi.
- [4] Resistencia Incubadora Placa Calentadora Cerámica A 110 V en venta en Morelia Michoacán por sólo 199.00 - OCompra.com Mexico. (s. f.). Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://www.ocompra.com/mexico/item/resistencia-incubadora-placa-calentadora-ceramica-a-110-v-602037750/>
- [5] mcruzmay@inditer.es. (2022, 6 enero). ¿Cómo funciona un disipador de calor y para qué sirve? Inditer S.A. Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://inditer.es/blog/como-funciona-un-disipador-de-calor/>
- [6] LM35 - El sensor de temperatura más popular. (2018, 18 enero). HeTPro-Tutoriales. Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://hetpro-store.com/TUTORIALES/lm35/>
- [7] Carmenate, J. G. (2022, 13 enero). Arduino Nano el capo de la familia Arduino Nano. Programar fácil con Arduino. Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://programarfácil.com/blog/arduino-blog/familia-arduino-nano/>
- [8] Carmenate, J. G. (2022b, junio 24). Arduino Mega 2560 el hermano mayor de Arduino UNO. Programar fácil con Arduino. Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://programarfácil.com/blog/arduino-blog/arduino-mega-2560/>

- 
- [9] ¿Para qué sirven los pines en este módulo de relé? - Electronica. (s. f.). Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://electronica.guru/questions/6416/para-que-sirven-los-pines-en-este-modulo-de-rele>
- [10] Ching-Huang and Wu, Pei-Hsun and Wu, Shih-Kuo, W.-H. and L., Wei-Keng and Tsai. (2019). A Thermo-Electric Apparatus for Thermal Diffusivity and Thermal Conductivity Measurements. En *Energía* (12.a ed., Vol. 22). Zhang.
- [11] Modified Angström's method for measurement of thermal diffusivity of materials with low conductivity. (s. f.). En *Review of Scientific Instruments* (6.a ed., Vol. 58). Belling, Jeffrey M. and Unsworth, Joe.
- [12] Measurement of the thermal diffusivity of dental filling materials using modified Ångström's method (7.a ed., Vol. 22). (2006). erzy Bodzenta and Bogusław Burak and Marian Nowak and Monika Pyka and Maria Szałajko and Marta Tanasiewicz.
- [13] Buksman, E. (2019). Experimentando con Arduino y Scilab: propagación de calor en una barra metálica (1.a ed., Vol. 41). SciELO Brasil.