



UNIVERSIDAD DE SONORA

FACULTAD INTERDISCIPLINARIA DE

CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE INVESTIGACIÓN EN FÍSICA

Maestría en Ciencias (Física)

Reflexión y transmisión de ondas térmicas en una varilla metálica

T E S I S

Que para obtener el título de:

Maestro en Ciencias (Física)

Presenta:

HUMBERTO CAMACHO GUILLEN

Director de tesis: Dr. JESÚS MANZANARES MARTÍNEZ

Hermosillo, Sonora, México, 5 de junio de 2024

Contenido

Introducción	2
1.1. Introducción	2
1 Antecedentes teóricos	4
1.1. Ecuación unidimensional de calor.	4
1.2. Ondas Térmicas en un barra metálica.	6
1.2.1. Experimento realizado por Bodas <i>et al</i>	6
1.2.2. Experimento realizado por Anwar <i>et al</i>	7
2 Solución general	10
2.1. Solución general de la ecuación unidimensional de calor.	10
2.1.1. Conexión de nuestra solución con la solución de Anwar <i>et al</i>	14
3 Diseño experimental	15
3.1. Componentes experimentales conservados de la versión anterior.	15
3.1.1. Barra de aluminio y acero.	16
3.1.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 12 volts.	16
3.1.2.1. Características de resistencia:	17
3.1.3. Sensores de temperatura.	17
3.1.3.1. LM35.	18
3.1.3.2. Pines del sensor LM35.	18
3.1.4. Calibración de sensor LM35 en pozo Fluke Calibration 9173.	18
3.2. Puente H bts7960.	20
3.2.1. Conexiones Puente H BTS7960.	21
3.3. Display Oled I2c.	22

3.4.	Potenciometro.	23
3.5.	Diseño experimental.	24
3.5.1.	Colocación de barras de aluminio y acero en resistencia en disipadores de aluminio.	24
3.5.2.	Distribución de sensores LM35.	25
3.5.3.	Programación de Arduino MEGA2560 para sensores LM35.	26
3.5.4.	Conexiones de sensores LM35 a Arduino MEGA2560.	26
3.5.5.	Conexiones de Arduino nano a puente H-Display OLED I2C-Potenciometros.	27
3.5.6.	Código de configuración Arduino-Puente H.	27
3.5.7.	Obtención de datos de Arduino.	29
4	Resultados Teóricos y Experimentales	30
4.1.	Análisis teórico de interfase entre dos medios	31
4.2.	Aplicación de condiciones de frontera para $T(x, t)$	32
4.2.1.	Temperatura para $x = 0$	32
4.2.2.	Temperatura para $x > l_a$	33
4.3.	Condición de frontera en $x = l_a$	34
4.3.1.	Continuidad de $T(x, t)$	34
4.3.2.	Continuidad de $q(x, t)$	35
4.3.3.	Determinación de coeficientes	36
4.4.	Construcción de la solución.	36
4.5.	Ajuste teorico experimental	38
4.5.1.	Proceso de ajuste teorico-experimental.	39
	Conclusiones	41
A		43
A.1.	Código Arduino MEGA2560 para sensores LM35	43
A.2.	Código Arduino para controlar Puente H y visualización en pantalla OLED.	43
A.3.	Código toma de datos Python.	48
A.4.	Calculo en python para encontrar coeficientes a_{-1}^+ , a_{-1}^- , a_1^+ , a_1^- , b_{-1}^- y b_1^-	48
	Bibliografía	50

Índice de figuras

1.1. Ilustración de sección diferencial de varilla en el eje x	4
1.2. Ilustración de experimento realizado por Bodas <i>et al</i>	6
1.3. Variación periodica de resistencia ubicados en 8 y 16 cm. (Figura tomada de la referencia [2])	7
1.4. Ilustracion de experimento de Anwar (Figura tomada de la referencia [4])	7
1.5. Variación periodica de la temperatura como función del tiempo (Figura tomada de la referencia [4])	8
2.1. Gráfica ilustrativa de nuestra solución general de un caso homogenio en X=0cm y X=2cm	14
3.1. Barras de aluminio y acero	16
3.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 12 volts.	17
3.3. [11]	18
3.4. Vista del panel frontal de Metrology Well [6]	19
3.5. Ilustración de Puente H bts7960	20
3.6. Ilustración de conexiones de Puente H BTS7960[8]	22
3.7. Ilustración de Display Oled I2C[7]	23
3.8. Ilustración de Potenciometro	24
3.9. Barras de aluminio y acero sostenidas por disipadores.	25
3.10. Ilustración de sensores LM35 colocados en barra aluminio-acero.	26
3.11. Ilustración de conexion Arduino MEGA2560 con sensor de temperatura LM35	27
3.12. Conexión de fuente 12V-Puente H-ArduinoNano.	28
3.13. Temperatura en una barra dual de aluminio y acero con un periodo de 1600 segundos.	29
4.1. Ilustración una barra compuesta de dos materiales.	30

4.2. Gráficas de temperatura en función de la posición obtenidas teóricamente.	38
4.3. Barra compuesta de dos materiales, aluminio seguido de acero.	38
4.4. Ajuste teórico-Experimental	40

Agradecimientos |

Introducción

1.1. Introducción

El estudio de la conductividad térmica ha sido un área de alta relevancia en la física y la ingeniería, dada su importancia en diversas aplicaciones que van desde el control térmico en dispositivos electrónicos hasta el desarrollo de materiales avanzados para la industria. A lo largo del tiempo, la investigación en este campo ha experimentado avances significativos. En el siglo XIX, Anders Jonas Ångström [1] realizó estudios innovadores sobre la transmisión de calor en sólidos, marcando así un hito en esta área.

La investigación en fenómenos térmicos ondulatorios es actualmente un área de profundo interés y relevancia. Por ejemplo, recientemente se demostró de forma experimental la existencia de oscilaciones térmicas en germanio a temperatura ambiente [3]. Actualmente es necesario entender el fenómeno de propagación de ondas térmicas en medios sólidos, ya que existen importantes aplicaciones tecnológicas y científicas. Evidentemente, es necesario entender la propagación de ondas térmicas no solo en medios homogéneos, sino también en sistemas compuestos que estén conformados por dos o más medios disimilares. En este contexto, la presente investigación se dedica al estudio de ondas térmicas a través de la interfase entre dos medios.

El estudio de las ondas térmicas es crucial en diversos campos, desde la ingeniería de materiales hasta la física de la energía. Sin embargo, comprender completamente estos fenómenos sigue siendo un desafío significativo, especialmente en sistemas compuestos por materiales diferentes, que potencialmente darán lugar a nuevos dispositivos tecnológicos. En este trabajo sobre ondas térmicas nos basamos en dos artículos publicados en el *American Journal of Physics*, el cual es una revista para estudiantes de física a nivel licenciatura [2, 4]. Ambos artículos se dedican al estudio de ondas térmicas en una barra. En este trabajo, nosotros realizamos un diseño experimental basado en el uso de microcontroladores Arduino, brindándonos una completa automatización del experimento.

En la presente tesis, estudiamos las ondas térmicas en una barra metálica compuesta de dos materiales: aluminio y acero. Hemos desarrollado un diseño experimental que representa una

mejora sustancial respecto a mi tesis de licenciatura, titulada "Ondas térmicas de difusión en una varilla metálica" [5]. En esta tesis de maestría, seguimos el enfoque del diseño experimental presentado en mi tesis de licenciatura, realizando modificaciones para incorporar un sistema compuesto y la instalación de nuevos instrumentos de medición, con el fin de obtener resultados más precisos y mejorados.

El objetivo principal de esta tesis de maestría es validar un modelo teórico mediante la comparación con datos experimentales, permitiendo así una descripción más precisa de estos fenómenos ondulatorios. Esta investigación no solo busca confirmar la aplicabilidad de nuestro modelo teórico en condiciones controladas, sino también mejorar la comprensión de cómo las ondas térmicas se comportan al interactuar con interfaces de diferentes propiedades térmicas.

1.1. Ecuación unidimensional de calor.

La ecuación unidimensional de calor describe cómo varía la temperatura T en el tiempo t y en una sola dimensión espacial x . Para describir esta ecuación, se parte de la ley de conservación de energía aplicada a un medio continuo en el cual el calor se propaga únicamente por conducción.

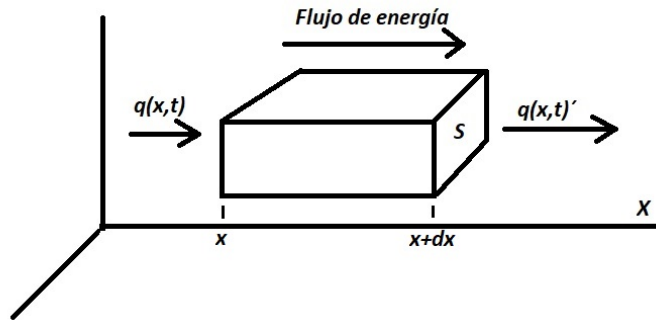


Figura 1.1: Ilustración de sección diferencial de varilla en el eje x

La energía interna U , basandonos en la conservación del flujo de la energía en una dimensión:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \quad (1.1)$$

Contenida en un segmento de longitud Δx en la dirección x está determinada por tres factores principales:

1. **Masa:** La cantidad de material dentro del segmento, determinada por su densidad ρ y la longitud del segmento Δx . Entonces, la masa dentro del segmento es $\rho\Delta x$.

2. **Capacidad para almacenar calor:** Esta se representa mediante el calor específico c_p , que indica cuánto calor se requiere para elevar la temperatura de una unidad de masa del material en una unidad de temperatura.

3. **Temperatura:** La temperatura del segmento en un momento dado $T(x,t)$, que es la variable que estamos estudiando.

Cuando multiplicamos la masa ($\rho\Delta x$) por la capacidad para almacenar calor (c_p) y por la temperatura $T(x,t)$, obtenemos la cantidad total de energía interna contenida en ese segmento en el tiempo t , esto se expresa como $U = \rho c_p \Delta x T(x,t)$.

Considerando cómo cambia la energía interna con el tiempo, estamos observando cómo la distribución de calor en el material evoluciona a medida que transcurre el tiempo. Esta tasa de cambio de energía con respecto al tiempo es fundamental para entender cómo la temperatura en el material se modifica con el tiempo, y se expresa mediante la derivada temporal:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial \rho c_p \Delta x T(x, t)}{\partial t} \quad (1.2)$$

Ahora, la conducción de calor en un medio se describe generalmente por la ley de Fourier, la cual establece que la tasa de flujo de calor "q" a través de un área es proporcional al gradiente de temperatura negativo en una dimensión, es:

$$q(x, t) = -k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \quad (1.3)$$

donde k es la conductividad térmica del material.

Para plantear la ecuación diferencial que describe el proceso de transferencia de calor, sustituimos la ecuación 1.2 y 1.3 en 1.1 consideramos un sólido homogéneo con densidad ρ , calor específico c , y conductividad térmica k , todas constantes en el intervalo de temperaturas considerado.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p \Delta x T(x, t)) = -\frac{\partial (q(x, t)|_{x+\Delta x} - q(x, t)|_x)}{\partial x} \quad (1.4)$$

donde ρ es la densidad del material, y c_p es el calor específico a presión constante. Expresando el flujo de calor $q(x, t)$ en términos de la temperatura, obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_p \Delta x T(x, t)) = -\frac{\partial \left(-k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} |_{x+\Delta x} + k \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} |_x \right)}{\partial x} \quad (1.5)$$

Simplificando y dividiendo ambos lados por $\rho c_p \Delta x$, se tiene:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Definiendo la difusividad térmica D como $D = \frac{k}{\rho c_p}$, obtenemos finalmente la ecuación de calor unidimensional en la forma:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (1.7)$$

Esta es la ecuación de calor unidimensional, donde $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ representa la difusión del calor (cambios en la distribución de temperatura en el espacio), y $\frac{1}{D} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$ representa la variación de la temperatura con el tiempo.

1.2. Ondas Térmicas en un barra metálica.

Cuando se producen fluctuaciones periódicas de calor en un extremo de una barra metálica, una onda térmica se propaga a lo largo del medio. Este fenómeno, conocido como onda térmica, ha sido objeto de estudio en la literatura científica, destacándose al menos dos artículos que presentan experimentos que demuestran dicha propagación en una barra. A continuación, mencionaremos dos de estos estudios: el experimento realizado por A. Bodas *et al.* [2] y el llevado a cabo por Anwar *et al.*[4].

1.2.1. Experimento realizado por Bodas *et al*

En 1998, Bodas *et al.*[2] llevaron a cabo un experimento para estudiar la propagación de ondas térmicas en una barra circular de cobre con un diámetro de 0.15 m y una longitud de 0.5 m. En este ensayo, se aplicó un calentamiento periódico en uno de los extremos cada 80 segundos, realizado manualmente. La medición de la variación de temperatura se llevó a cabo mediante la colocación de termopares. En la Fig. 1.2.1. se ilustra la colocación de termopares a distancias de 8 y 16 cm a lo largo de la barra.

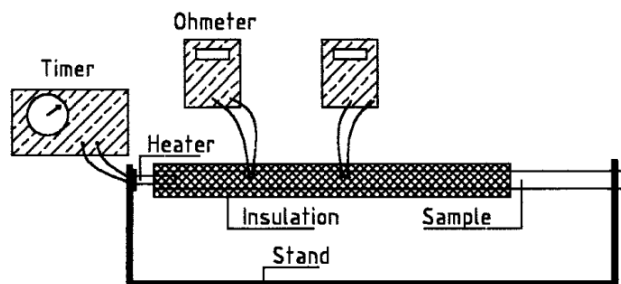


Figura 1.2: Ilustración de experimento realizado por Bodas *et al*
 . (Figura tomada de la referencia [2])

En la fig. 1.3 se muestra la variación periodica de la resistencia de los termopares ubicados a 8 y 16 cm. El trabajo de Bodas *et al.* tenía la intención de servir como guía para que los estudiantes pudieran realizar un experimento sencillo sobre ondas térmicas.

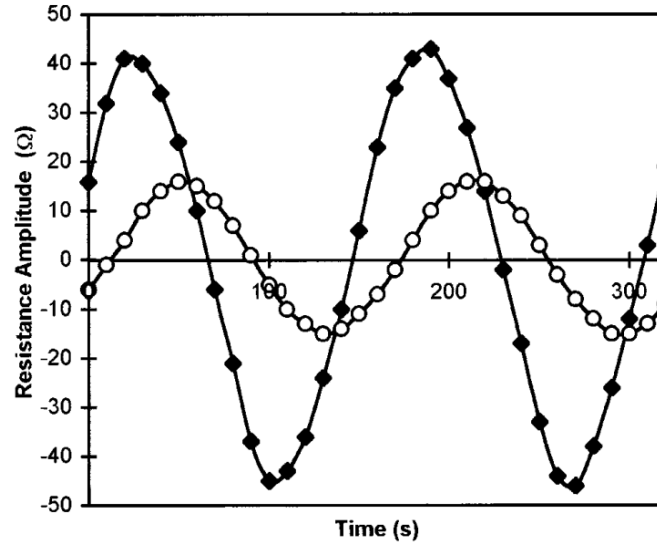


Figura 1.3: Variación periódica de resistencia ubicados en 8 y 16 cm. (Figura tomada de la referencia [2])

1.2.2. Experimento realizado por Anwar *et al*

En 2014, Anwar *et al.* publicaron los resultados de un experimento que mejoraba la medición de ondas térmicas realizada por Bodas *et al*[2]. Las mejoras se centraron en dos aspectos principales. Primero, se implementó un control automático de la variación periódica de la temperatura en un extremo de la barra. Segundo, se realizó una captura automática de los datos mediante una tarjeta PCI-6221 conectada a una computadora.

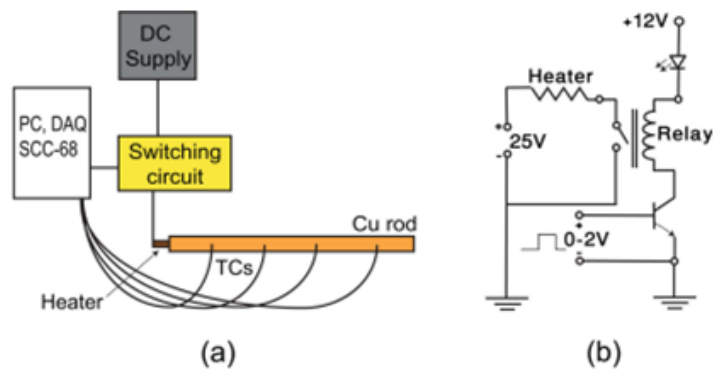


Figura 1.4: Ilustración de experimento de Anwar (Figura tomada de la referencia [4])

En la Figura 1.4, se presenta un esquema del experimento. En el panel (a) se muestra el esquema experimental donde tanto el calentamiento como la detección de temperatura son controlados mediante una computadora. En el panel (b) se ilustra la electrónica que permite la variación periódica de la temperatura en un extremo de la barra.

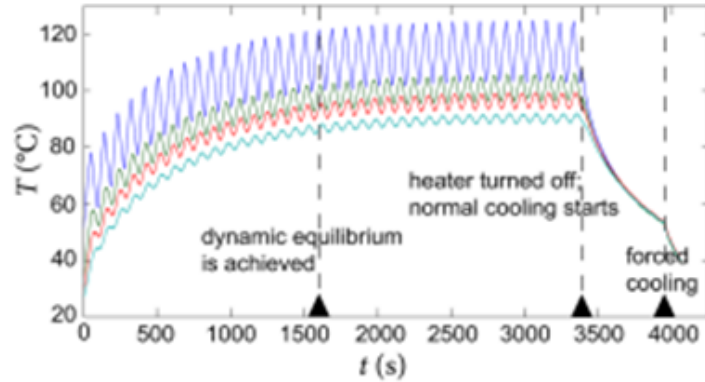


Figura 1.5: Variación periódica de la temperatura como función del tiempo (Figura tomada de la referencia [4])

En la Figura 1.5, se muestran los resultados experimentales. La variación de temperatura para termómetros ubicados en las posiciones 3.3, 6.6, 9.9 y 13.2 cm, se presenta en azul oscuro, verde, rojo y azul celeste, respectivamente. Se puede apreciar que, a medida que se alejan de la fuente de calor, la oscilación de la temperatura disminuye. También se identifican dos regiones en el dominio temporal. Antes de los 1510 segundos, se observa un estado transitorio en el cual la barra se está calentando. Después de los 1510 segundos, se alcanza un estado estacionario en el cual el calentamiento es periódico.

Análisis teórico de Anwar *et al*

Para resolver la ecuación unidimensional de calor Anwar planteo un *ansatz*, es decir, la propuesta de la solución de la forma,

$$T(x, t) = c_0(x) + \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} c_n(x) \text{Cos}(w_n t - \varepsilon_n) \quad (1.8)$$

Y consideró, una condición de frontera de la forma,

$$f(t) = \langle T(0) \rangle - \frac{4 \Delta T}{\pi^2} \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nw_1 t) \quad (1.9)$$

De tal manera que su solución de la ecuación unidimensional de calor se puede escribir mediante la formula,

$$T(x, t) = P_1 x + \langle T(0) \rangle - \frac{4 \Delta T}{\pi^2} \sum_{n=1,2,3,..}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{\frac{-x}{d_n}} \text{Cos}(w_n t - \frac{x}{d_n}) \quad (1.10)$$

El procedimiento que realizó Anwar al plantear una solución como una "sugerencia" nos parece una estrategia insatisfactoria. El problema con esta estrategia radica en que, si se cambia la condición de frontera, evidentemente la sugerencia de solución deberá ser modificada. Para abordar esta preocupación, se propone desarrollar un método general que pueda describir la temperatura en cualquier condición.

Capítulo 2

| *Solución general*

2.1. Solución general de la ecuación unidimensional de calor.

Ahora el desafío es encontrar una solución que no dependa de condiciones específicas de frontera, En lugar de plantear soluciones basadas en conjeturas particulares, nos adentraremos en el desarrollo de un método general que permita describir la temperatura a lo largo de una dimensión bajo cualquier conjunto de condiciones de frontera. Comenzamos con la ecuación unidimensional de calor. Este enfoque no sólo nos permitirá tratar condiciones de frontera variables, sino también incorporar variaciones en las propiedades del medio, como la conductividad térmica y la capacidad calorífica.

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} T(x, t), \quad (2.1)$$

Buscamos una solución para esta ecuación en un estado estacionario, lo que nos lleva a proponer que la solución se puede expresar como una serie de Fourier:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x, t). \quad (2.2)$$

Esperamos que la solución sea separable en x y t , por lo que proponemos la siguiente separación de variables:

$$T_n(x, t) = A_n(x)B_n(t). \quad (2.3)$$

Esto nos permite separar la ecuación diferencial en la forma:

$$\frac{D}{A_n(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_n(x) = \frac{1}{B_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} B_n(t). \quad (2.4)$$

Centrándonos en la parte temporal, obtenemos:

$$\frac{1}{B_n(t)} \frac{\partial}{\partial t} B_n(t) = C_n, \quad (2.5)$$

donde C_n es una constante de separación.

Considerando que las soluciones oscilan en el tiempo, proponemos:

$$B_n(t) = b_n e^{in\omega_0 t}, \quad (2.6)$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau_0}$ y τ_0 es el período arbitrario definido. Sustituyendo la ecuación 2.6 en 2.5, determinamos la constante de separación como $C_n = in\omega_0$.

Al sustituir la solución temporal 2.6 en la ecuación 2.3, obtenemos:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x) b_n e^{in\omega_0 t}. \quad (2.7)$$

Para simplificar, introducimos una relación $A'_n(x) = A_n(x) b_n$, lo que nos lleva a escribir:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t}. \quad (2.8)$$

Es útil descomponer esta expresión de suma en tres partes:

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t}. \quad (2.9)$$

Para manejar la primera parte de la suma, proponemos un cambio de variable $n' = -n$, obteniendo:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} = \sum_{-n'=-\infty}^{-n'=-1} A'_{-n'}(x) e^{-in'\omega_0 t}. \quad (2.10)$$

Luego, cambiamos el índice a $n = n'$:

$$\sum_{-n'=-\infty}^{-n'=-1} A'_{-n'}(x) e^{-in'\omega_0 t} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t}. \quad (2.11)$$

Considerando estas transformaciones, podemos reescribir la ecuación 2.9 como:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t}. \quad (2.12)$$

Sustituyendo la solución 2.12 en la ecuación 2.1 tenemos:

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{n=1}^{n=\infty} A'_{-n}(x) e^{-in\omega_0 t} + A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} A'_n(x) e^{in\omega_0 t} \right] \quad (2.13)$$

Aplicando la derivada tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) \right] e^{-in\omega_0 t} + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) \right] e^{in\omega_0 t} = \\ \sum_{n=1}^{n=\infty} [-in\omega_0 A'_{-n}(x)] e^{-in\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [in\omega_0 A'_n(x)] e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Igualando término a término tenemos tres ecuaciones diferenciales:

- Para A'_n

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) = i \frac{n\omega_0}{D} A'_n(x) \quad (2.15)$$

- Para A'_0

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) = 0 \quad (2.16)$$

- Para A'_{-n}

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) = -i \frac{n\omega_0}{D} A'_{-n}(x) \quad (2.17)$$

Analizamos la solución de cada uno de estos tres casos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_n(x) = i \frac{n\omega_0}{D} A'_n(x) \quad (2.18)$$

La solución que planteamos para este caso es:

$$A'_n(x) = \psi_n^+ \exp \left[\sqrt{i \frac{n\omega_0}{D}} x \right] + \psi_n^- \exp \left[-\sqrt{i \frac{n\omega_0}{D}} x \right] \quad (2.19)$$

Es necesario obtener \sqrt{i} identificando que el número complejo en forma polar se escribe como:

$$i = e^{i\pi/2} \quad (2.20)$$

Y la raíz se obtiene:

$$\sqrt{i} = e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \quad (2.21)$$

Introduciendo este término, tenemos que la solución es de la forma:

$$A'_n(x) = \psi_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + \psi_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \quad (2.22)$$

$$d_n = \sqrt{\frac{2D}{n\omega_0}} \quad (2.23)$$

Para $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_0(x) = 0$, se propone la solución:

$$A'_0(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (2.24)$$

Ahora para $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A'_{-n}(x) = -i \frac{n\omega_0}{D} A'_{-n}(x)$, se propone como solución:

$$A'_n(x) = \psi_{-n}^+ \exp\left(\sqrt{-i \frac{n\omega_0}{D}} x\right) + \psi_{-n}^- \exp\left(-\sqrt{-i \frac{n\omega_0}{D}} x\right) \quad (2.25)$$

Es necesario obtener $\sqrt{-i}$ identificando que el número complejo en forma polar se escribe como:

$$-i = e^{-i\pi/2} \quad (2.26)$$

y la raíz se obtiene:

$$\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i) \quad (2.27)$$

$$A'_{-n}(x) = \psi_{-n}^+ \exp\left[(1-i)\sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x\right] + \psi_{-n}^- \exp\left[-(1-i)\sqrt{\frac{n\omega_0}{2D}} x\right] \quad (2.28)$$

Así que conviene plantear que:

$$A'_{-n}(x) = \psi_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + \psi_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \quad (2.29)$$

Considerando estas soluciones para los coeficientes A'_n , $A_0(x)$ y A'_{-n} , tenemos que la temperatura es:

$$\begin{aligned} T(x, t) = & \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\psi_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + \psi_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \right] e^{-in\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\psi_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + \psi_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \right] e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.1.1. Conexión de nuestra solución con la solución de Anwar *et al*

Escribimos la ecuación 2.1 eliminando los términos que implican que la temperatura aumente a medida que crece x, haciendo $\psi_{-n}^+ = \psi_n^+ = 0$ para tener,

$$T(x, t) = \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} \psi_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} e^{-in\omega_0 t} + [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} \psi_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} e^{in\omega_0 t} \quad (2.31)$$

Donde si $l_n = \psi_{-n}^- + \psi_n^-$, la cual puede escribirse como,

$$T(x, t) = [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} l_n e^{-x/d_n} \left[e^{i(x/d_n - n\omega_0 t)} + e^{-i(x/d_n - n\omega_0 t)} \right] \quad (2.32)$$

Identificando el coseno, tenemos,

$$T(x, t) = [\alpha_0 + \alpha_1 x] + \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} 2l_n e^{-x/d_n} \cos(x/d_n - n\omega_0 t) \quad (2.33)$$

Aplicando la condición de frontera 1.9, finalmente podemos llegar a la misma solución obtenida por Anwar. 2.1.1

$$\begin{aligned} T(x, t) &= [\alpha_0 + \alpha_1 x] - \frac{4(T_h - T_l)}{(\pi n)^2} \sum_{n=1,3,5,7,\dots}^{n=\infty} e^{-x/d_n} \cos(x/d_n - n\omega_0 t) \quad (2.34) \\ &= P_1 x + \langle T(0) \rangle - \frac{4 \Delta T}{\pi^2} \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x}{d_n}} \text{Cos}(w_n t - \frac{x}{d_n}) \end{aligned}$$

Como una ilustración de la solución de la ecuación unidimensional de calor en una barra, prentamos la fig. 2.1 en donde se muestra la variación de la temperatura contra el tiempo para un barra homogenia de aluminio.

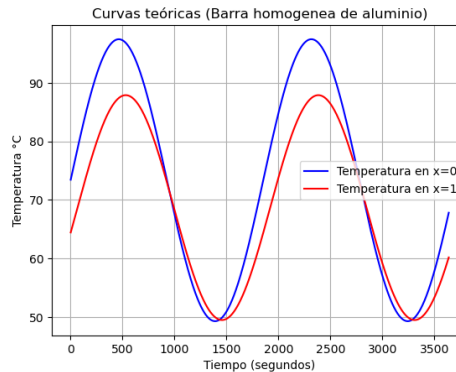


Figura 2.1: Gráfica ilustrativa de nuestra solución general de un caso homogenio en X=0cm y X=2cm

Capítulo 3

| *Diseño experimental*

Nuestro diseño experimental sigue el enfoque utilizado en mi tesis de licenciatura[5], pero se han realizado modificaciones para incorporar un sistema dual de materiales metálicos, en este caso aluminio y acero. Estas modificaciones representan una versión mejorada que nos permite medir la temperatura a lo largo de la barra de manera más precisa, además de recopilar otros parámetros experimentales como el voltaje y el período administrado a la resistencia. El propósito principal de estas modificaciones es obtener datos experimentales necesarios para determinar los coeficientes de reflexión y transmisión de ondas térmicas de manera más confiable.

3.1. Componentes experimentales conservados de la versión anterior.

A continuación presentaremos los elementos que mantendremos en nuestro diseño experimental.

- Disipador de calor de aluminio: El funcionamiento de un disipador de calor es muy sencillo pero importante, pues consiste en hacer de mecanismo de transmisión de calor de la fuente más caliente hacia la fuente más fría
- Sensor de temperatura LM35: Para nuestro diseño experimental seguimos usando el sensor LM35, a diferencia que en este caso fue calibrado de manera correcta, hablaremos de esta calibración más adelante.
- Arduino Mega2560: El Arduino MEGA 2560 es una placa de desarrollo basada en el microcontrolador ATmega2560 (de aquí su nombre).
- Arduino nano: El Arduino Nano es una pequeña y completa placa basada en el ATmega328 (Arduino Nano 3.x).

Estos componentes siguen siendo indispensables para el correcto funcionamiento del experimento, si se quiere mayor información acerca de estos componentes pueden ser informado en mi tesis de licenciatura[5].

3.1.1. Barra de aluminio y acero.

Como medio conductor de calor, utilizaremos una barra de aluminio de 3 cm de longitud y una barra de acero de 8 cm, tal como se muestra en la Figura 3.1. Estas barras fueron adquiridas en un distribuidor local de metales y fueron refinadas en sus extremos en el laboratorio de mecanismos de la Universidad de Sonora. Es importante destacar que estas barras no cuentan con una tabla de propiedades físicas proporcionada por el fabricante.



Figura 3.1: Barras de aluminio y acero

3.1.2. Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 12 volts.

La resistencia mostrada en la Figura 3.2, también conocida como resistencia de PTC (coeficiente de temperatura positivo), se utiliza para calentar el aire o superficies sólidas. El PTC tiene una característica especial que lo distingue: mantiene una temperatura constante en la superficie del material, lo que le permite variar su potencia según la necesidad, y además tiene una larga vida útil.



Figura 3.2: Resistencia de cerámica con cubierta de aluminio a 12 volts.

3.1.2.1. Características de resistencia:

- Voltaje entrada: 12V
- Potencia máxima: 80W para 12V
- Dimensiones (LXA): 11x2 cm
- Material calefactor: PTC
- Temperatura calentamiento: Hasta 240 grados Celsius
- Material Externo: Aluminio.
- Cable: línea de alta temperatura

3.1.3. Sensores de temperatura.

Los sensores de temperatura son dispositivos que convierten los cambios de temperatura en señales eléctricas, las cuales son procesadas por equipos eléctricos o electrónicos. Se utilizan para una variedad de propósitos, incluido el control de sistemas de refrigeración, laboratorios y procesos automotrices, y son especialmente comunes en aplicaciones industriales.

Estos sensores pueden medir la temperatura en líquidos o a través del contacto con superficies. Sin embargo, no siempre es necesario el contacto físico; en el mercado existen sensores que pueden medir el calor sin contacto, utilizando tecnología infrarroja.

La principal ventaja de un sensor de temperatura es que proporciona una salida continua en función de la temperatura real del sistema, lo que permite un control completo de cualquier proceso.

3.1.3.1. LM35.

En nuestro caso, seguimos usando un sensor de temperatura conocido como LM35, el cual es un circuito electrónico sensor capaz de medir la temperatura. Su salida es analógica, lo que significa que proporciona un voltaje proporcional a la temperatura. La popularidad del LM35 se debe a su facilidad de uso para medir la temperatura. Incluso, no es necesario un microprocesador o microcontrolador para realizar esta medición. Dado que el sensor LM35 es analógico, simplemente necesitamos medir el voltaje de salida del sensor utilizando un multímetro.

Para convertir el voltaje a temperatura, el sensor LM35 proporciona 10 mV por cada grado centígrado. Es importante destacar que este sensor se puede utilizar sin offset, lo que significa que si medimos 20 mV en la salida, estaremos midiendo una temperatura de 2°C [11].

3.1.3.2. Pines del sensor LM35.

Los pines del sensor de temperatura son tres: GND, VCC y VSalida, y el orden de conexión de los pines puede variar dependiendo del empaquetado del sensor. En los sensores utilizados para nuestro experimento, el pinout está distribuido como se muestra en la Figura 3.3.

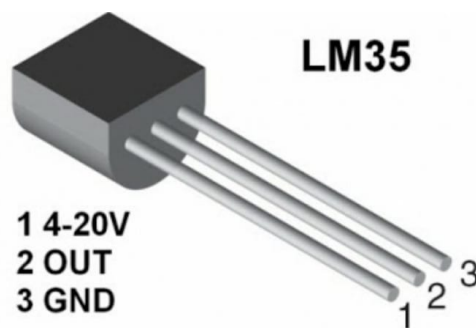


Figura 3.3: [11]

3.1.4. Calibración de sensor LM35 en pozo Fluke Calibration 9173.

El dispositivo Pozo de metrología de campo Fluke Calibration 9173 es un instrumento utilizado para calibrar termómetros, sondas y otros dispositivos de medición de temperatura. Este pozo de temperatura portátil permite la calibración precisa de dispositivos en el lugar donde

se utilizan, lo que elimina la necesidad de enviar los dispositivos a laboratorios externos para su calibración. El 9173 ofrece una amplia gama de temperaturas, desde $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$ hasta $150\text{ }^{\circ}\text{C}$, con una precisión excepcional. Su diseño compacto y portátil lo hace ideal para aplicaciones en campo donde la movilidad es importante. Además, suele contar con funciones avanzadas como la capacidad de ajuste automático de la temperatura y una interfaz fácil de usar para una operación sencilla y eficiente.



Figura 3.4: Vista del panel frontal de Metrology Well [6]

Para calibrar un sensor LM35 en un Pozo de metrología de campo Fluke Calibration 9173, se recomienda seguir estos pasos:

1. **Configuración del pozo:** Asegúrate de que el pozo de metrología esté configurado correctamente para la temperatura deseada, que en este caso correspondería a la temperatura nominal de funcionamiento del sensor LM35.
2. **Estabilización:** Deja que el pozo de temperatura se estabilice durante un período suficiente para alcanzar una temperatura constante y precisa.

3. **Colocación del sensor:** Inserta el sensor LM35 en el pozo de temperatura de manera que esté completamente sumergido y en contacto con la fuente de temperatura interna del pozo.
4. **Lectura de la temperatura:** Lee la temperatura indicada por el sensor LM35 después de que haya alcanzado la estabilidad térmica dentro del pozo. Esta lectura se tomará como la temperatura medida por el sensor en esa condición.
5. **Comparación con el estándar:** Compara la lectura del sensor LM35 con una referencia de temperatura conocida y ajusta, si es necesario, la lectura del sensor para que coincida con el valor esperado.
6. **Registro de datos:** Registra los datos de calibración, incluyendo la temperatura del pozo, la temperatura medida por el sensor LM35 y cualquier ajuste realizado.
7. **Verificación:** Realiza una verificación final para asegurarte de que la calibración se haya realizado correctamente y que el sensor LM35 esté proporcionando lecturas precisas a la temperatura deseada.

3.2. Puente H bts7960.

El puente H BTS7960 es un tipo de controlador de motor de corriente continua (DC) de alta potencia. Es ampliamente utilizado en aplicaciones de control de motores, como robots, vehículos autónomos, impresoras 3D y otros dispositivos electromecánicos.

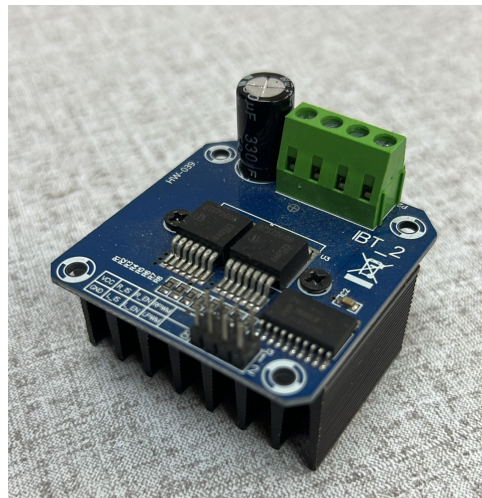


Figura 3.5: Ilustración de Puente H bts7960

- **Alta corriente:** Puede manejar corrientes de hasta varios amperios, lo que lo hace adecuado para motores de alta potencia.
- **Protección térmica:** Tiene circuitos integrados de protección térmica que ayudan a evitar el sobrecalentamiento del controlador.
- **Protección contra sobretensión y subvoltaje:** Ofrece protección contra picos de voltaje y caídas de voltaje para garantizar un funcionamiento seguro del motor.
- **Control de dirección y velocidad:** Permite controlar tanto la dirección del motor (hacia adelante o hacia atrás) como la velocidad, mediante la modulación de ancho de pulso (PWM) o señales analógicas.
- **Interfaz de control simple:** Puede ser controlado fácilmente por microcontroladores como Arduino u otros sistemas embebidos.

El puente H puede utilizarse con Arduino para administrar un voltaje sinusoidal aplicado a una resistencia, lo que permitiría controlar la temperatura de manera precisa. Al modular una señal PWM generada por Arduino y aplicarla a la resistencia a través del puente H, podemos ajustar la cantidad de energía disipada por la resistencia, lo que afectará directamente su temperatura. Al aumentar o disminuir la duración y la amplitud de los pulsos PWM, podemos variar la potencia entregada a la resistencia, lo que se traduce en un control preciso de la temperatura. Esto es especialmente útil en aplicaciones de control de temperatura donde se requiere una respuesta suave y ajustable.

3.2.1. Conexiones Puente H BTS7960.

La conexión de un driver con BTS7690 es sencilla. Por un lado, conectamos la alimentación lógica del driver a 0 y 5V.

Para el control, únicamente necesitamos 3 salidas digitales. Una de ellas controlará la activación de los puentes, y las otras dos la velocidad de giro.

Finalmente, conectamos la fuente de alimentación que proporcionará corriente al motor y el motor mediante los bornes existentes en el driver.[8]

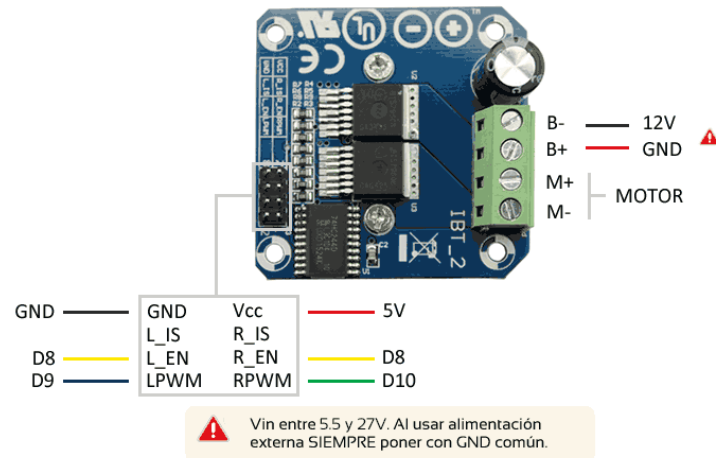


Figura 3.6: Ilustración de conexiones de Puente H BTS7960[8]

3.3. Display Oled I2c.

El Display OLED I2C es un tipo de pantalla que utiliza la tecnología OLED (Organic Light-Emitting Diode) para mostrar información de manera clara y nítida. La interfaz I2C (Inter-Integrated Circuit) permite una conexión sencilla con otros dispositivos, utilizando solo cuatro pines (VCC, GND, SCL y SDA). Esta pantalla suele tener un tamaño compacto y bajo consumo de energía, lo que la hace ideal para proyectos electrónicos donde se requiere visualización de datos en espacios reducidos o con restricciones de energía. Además, su resolución suele ser alta y su ángulo de visión amplio, lo que garantiza una visualización óptima en diversas condiciones de iluminación y ángulos de observación.

Características:

- **Tamaño del display:** 0.96 pulgadas (25.4 mm x 14 mm)
- **Ángulo de visión:** 160°
- **Resolución:** 128x64, con fondo negro y píxeles blancos
- **Interface I2C:** 4 Pines (VCC, GND, SCL, SDA)
- **Chip:** SSD1306

- **Alimentación:** 3.3V a 5.0V
- **Consumo:** 60 mW
- **Temperatura:** -30°C a 70°C
- **Dimensiones:** 27.8 mm x 27.3 mm x 2.3 mm

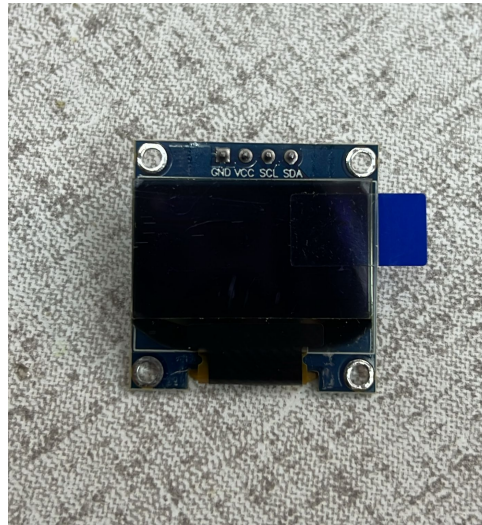


Figura 3.7: Ilustración de Display Oled I2C[7]

3.4. Potenciómetro.

Un potenciómetro de 3 pines es un dispositivo electrónico que permite ajustar manualmente la resistencia eléctrica. Consiste en una resistencia variable y un contacto deslizante que se mueve a lo largo de la resistencia. Los tres pines del potenciómetro son el terminal central, que está conectado al contacto deslizante, y dos terminales externos que están conectados a los extremos de la resistencia. Al girar el eje del potenciómetro, se modifica la resistencia entre el terminal central y uno de los terminales externos, lo que permite controlar la cantidad de corriente que fluye a través del circuito conectado. Este tipo de potenciómetro se utiliza comúnmente en aplicaciones donde se necesita ajustar la intensidad de una señal, el volumen de un dispositivo o cualquier otro parámetro que requiera un control variable.

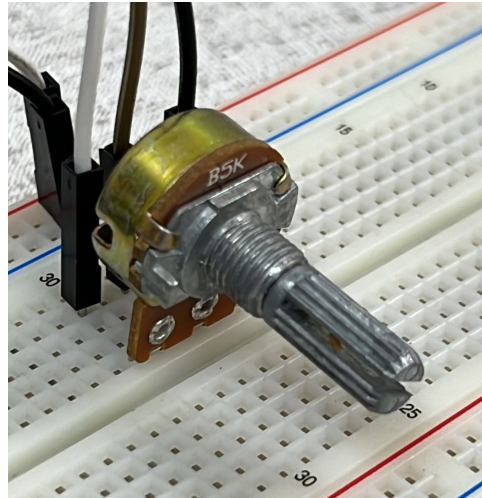


Figura 3.8: Ilustración de Potenciometro

3.5. Diseño experimental.

El uso de microcontroladores Arduino sigue siendo indispensable para nuestro diseño experimental, ya que nos proporciona una completa automatización del experimento y la toma de datos. Además, hemos agregado un display OLED I2C para visualizar en tiempo real el voltaje administrado a la resistencia. También se han incorporado dos potenciómetros: uno para manipular el periodo en el que se administra el voltaje, que varía de 10 a 1600 segundos, y el segundo potenciómetro se utiliza para ajustar el voltaje máximo que recibe la resistencia, con un rango de 0 a 12 voltios.

Nuestro experimento se basa en el método de Ångström, el cual consiste en calentar una barra del material elegido por un extremo, aplicándole calor de forma periódica, mientras se permite que el otro extremo se enfríe libremente. Gracias a esto, la temperatura en un punto dado de la barra experimentará oscilaciones periódicas.

En lugar de utilizar una barra metálica convencional, hemos optado por una barra dual que combina aluminio y acero. Esto nos brinda la oportunidad de analizar fenómenos de reflexión y transmisión de ondas térmicas en diferentes partes de la barra.

3.5.1. Colocación de barras de aluminio y acero en resistencia en disipadores de aluminio.

Colocamos manualmente nuestras barras de aluminio y acero, con longitudes de 4 cm y 8 cm respectivamente, en contacto con uno de sus extremos con la resistencia de 12 voltios.

Además, hemos instalado dos disipadores de aluminio en los extremos de la barra, los cuales están asegurados con dos tornillos, como se muestra en la Figura 3.9.

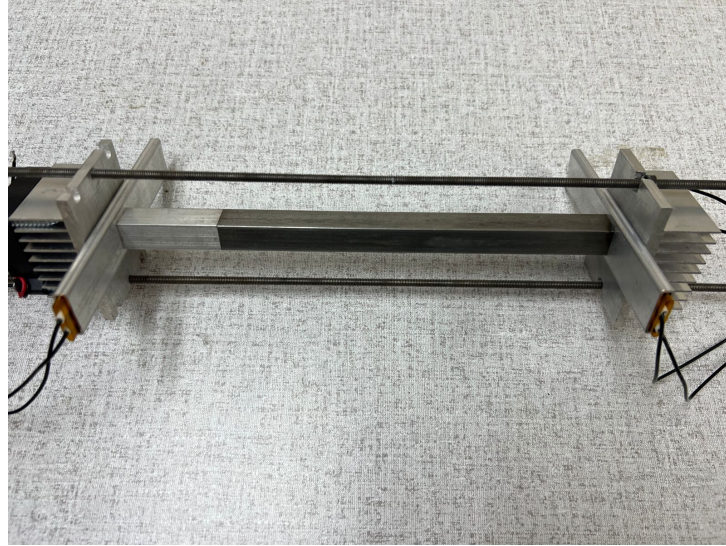


Figura 3.9: Barras de aluminio y acero sostenidas por disipadores.

Este tipo de ajuste nos ayuda a no depender de ningún tipo de adhesivo, lo que asegura que el contacto térmico no sea influenciado por agentes externos al sistema.

3.5.2. Distribución de sensores LM35.

Ahora, a lo largo de nuestra barra, hemos colocado sensores de temperatura LM35 a distancias diferentes, cada uno con aproximadamente 2 cm de separación. Teniendo en cuenta que el primer sensor LM35 colocado en la barra de aluminio será el más cercano posible a la resistencia, actuando como la posición de origen o $x = 0$, y el primer sensor en la barra de acero se colocará lo más cerca posible de la interfaz de los dos materiales, como se muestra en la Figura 3.10. Cabe mencionar que también se ha colocado un sensor de temperatura extra en la resistencia para monitorear el comportamiento de la temperatura. Esto nos ayuda a verificar el buen funcionamiento de la resistencia. La cantidad total de LM35 colocados en la barra de aluminio-acero es de 7, sin tener en cuenta el sensor colocado en la resistencia.

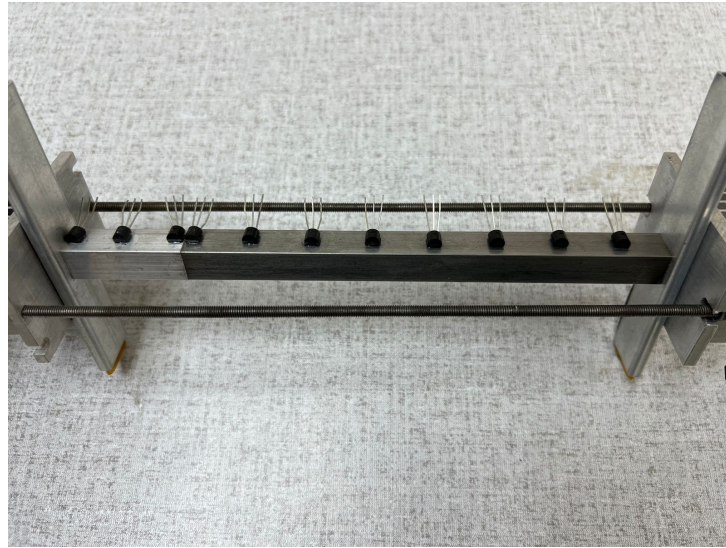


Figura 3.10: Ilustración de sensores LM35 colocados en barra aluminio-acero.

3.5.3. Programación de Arduino MEGA2560 para sensores LM35.

Las lecturas de estos sensores son monitoreadas y asimiladas por el instrumento Arduino mega2560. Este Arduino es manipulado por un el código(A.1) ilustrado en el apendice(para un solo sensor):

Con esta información, podemos configurar este código para el número de sensores que sean necesarios para nuestro experimento.

3.5.4. Conexiones de sensores LM35 a Arduino MEGA2560.

La conexión de los LM35 a Arduino MEGA2560 para la recolección de datos es muy sencilla. Anteriormente en el punto 3.1.4.4 se explicó la distribución de los pines para este sensor. Sabiendo esto podemos tener una idea clara de cómo realizar este procedimiento. Conectamos el pin VCC del LM35 a la toma de corriente VCC de 5 V, el pin GND del LM35 al GND indicado en el Arduino MEGA2560, y para el pin OUT del LM35 hacemos la conexión en la entrada analógica indicada como A0, como podemos ver en la fig. (3.11):

Podemos hacer esto para cada uno de los sensores de temperatura LM35 que queramos colocar a lo largo de la barra, usando como herramienta una protoboard para tener acceso a la toma de VCC y GND en cada uno de los sensores y usando consecutivamente las entradas analógicas del Arduino MEGA2560. Es importante tener en cuenta la posición de cada sensor en el Arduino, ya que así podremos ubicar más rápidamente un posible fallo en las conexiones o en el sensor.

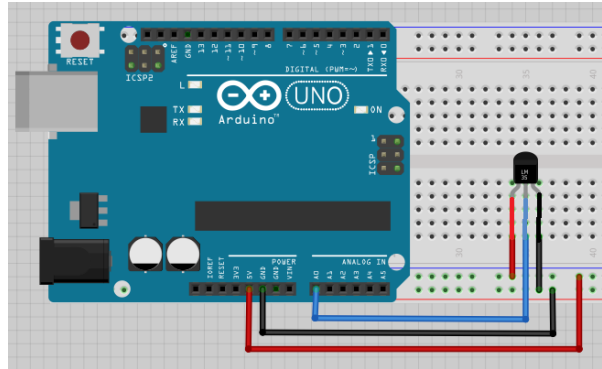


Figura 3.11: Ilustración de conexión Arduino MEGA2560 con sensor de temperatura LM35

3.5.5. Conexiones de Arduino nano a puente H-Display OLED I2C-Potenciometros.

Podemos ver en la fig. 3.12 el esquema de conexiones para el Arduino MEGA, el cual cumple con múltiples funciones a la vez gracias a su programa, las cuales son:

- Configurar nuestro Puente H BTS7960 para administrar el voltaje de manera oscilatoria.
- Incorporar dos potenciometros, los cuales se encargan de manipular dos valores esenciales para el experimento, los cuales son el periodo y voltaje máximo.
- Imprimir en display OLED I2C una gráfica la cual muestra en tiempo real el voltaje administrado a nuestra resistencia, así como también muestra los valores de periodo y voltaje máximo configurados por los potenciometros.

3.5.6. Código de configuración Arduino-Puente H.

De igual forma que en el caso anterior con los sensores LM35, para el puente H, el Arduino también debe ser configurado por el código(A.2), como se muestra en el apéndice, ahora nuestro arduino funciona como transmisor de información y modifica la señal PWM de forma senoidal con un periodo establecido en dicho código. Además, el Arduino se encarga de imprimir en nuestro display OLED I2C una gráfica que muestra el voltaje administrado a la resistencia en tiempo real, utilizando los valores recibidos por los potenciómetros. El código también está configurado para permitir la manipulación del periodo y el voltaje máximo de la resistencia a través de los potenciómetros.

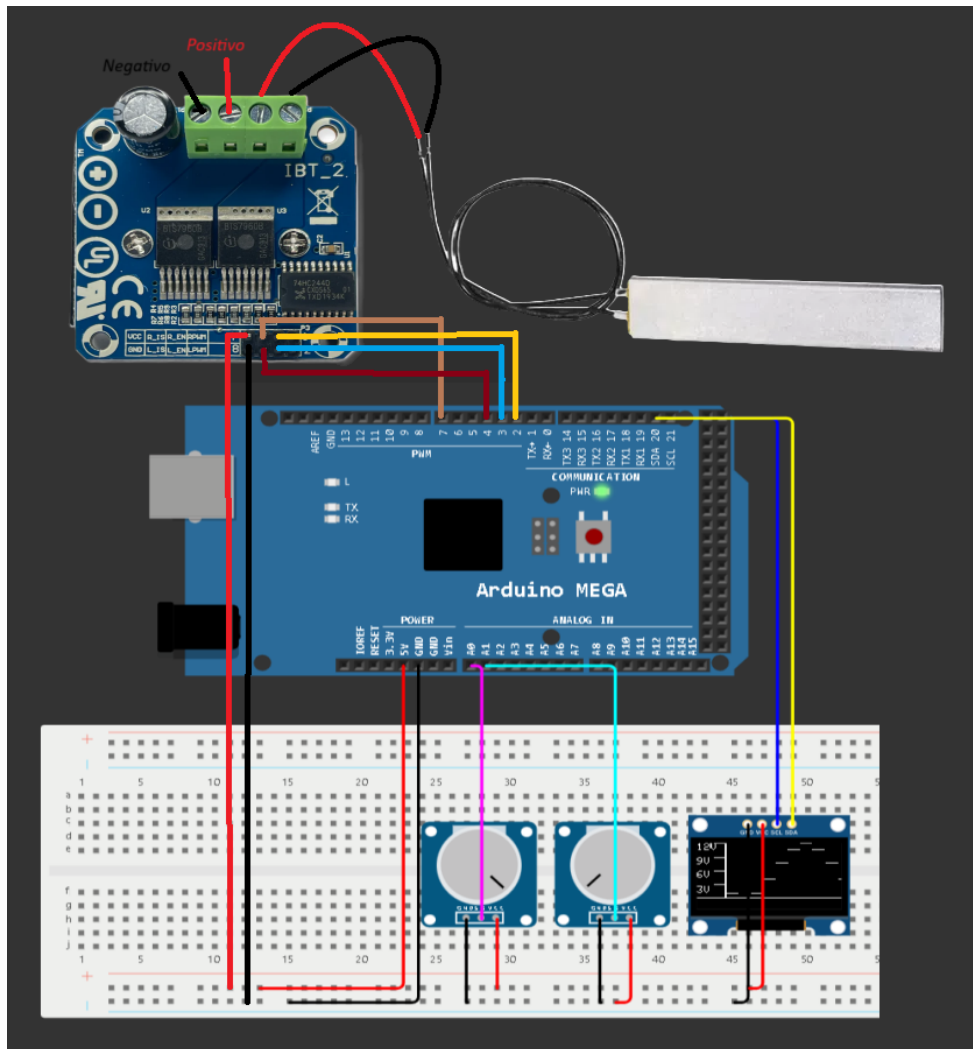


Figura 3.12: Conexión de fuente 12V-Puente H-ArduinoNano.

3.5.7. Obtención de datos de Arduino.

Los datos obtenidos por el Arduino Mega2560 y los sensores LM35 son procesados en tiempo real por nuestro equipo de cómputo utilizando el lenguaje de programación Python, usando este metodo hemos creado el codigo(A.3), el cual podemos ver en el apéndice. Estos datos se utilizan para crear un archivo de texto (.txt), el cual será utilizado posteriormente para el análisis de datos. Este código nos permite interpretar nuestros datos experimentales, que ilustramos en la fig. (3.13).

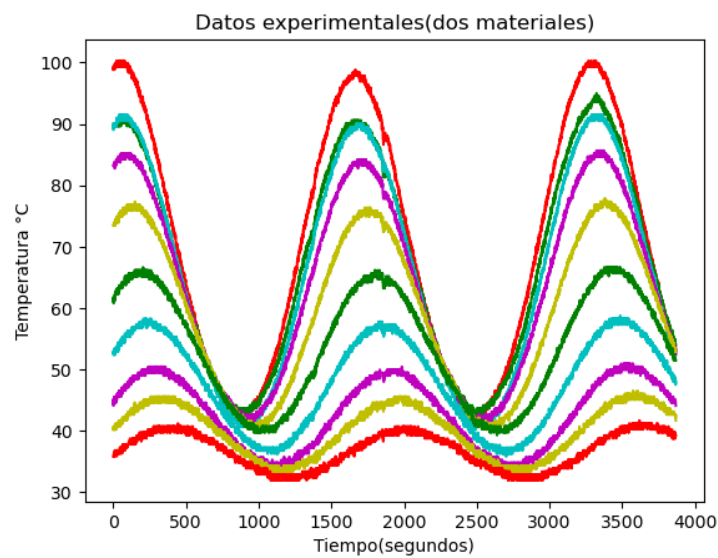


Figura 3.13: Temperatura en una barra dual de aluminio y acero con un periodo de 1600 segundos.

Capítulo 4 | Resultados Teóricos y Experimentales

La importancia del análisis teórico-experimental en este trabajo radica en la necesidad de validar y comparar los datos experimentales con los resultados predichos por nuestro modelo teórico. Este ajuste permite verificar la existencia de los fenómenos ondulatorios. Por tanto, la presente investigación busca no solo confirmar la existencia de las ondas térmicas en el sistema propuesto, sino también ofrecer una comparación detallada entre datos experimentales y teóricos, lo que contribuirá al avance del conocimiento en este campo.

En esta sección vamos aplicar nuestra solución general de la ecuación unidimensional de calor 2.1

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\psi_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n)} + \psi_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_0 + \alpha_1 x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\psi_n^+ e^{(1+i)(x/d_n)} + \psi_n^- e^{-(1+i)(x/d_n)} \right] e^{in\omega_0 t}$$

Al problema de la propagación de calor a través de dos materiales. En la fig. 4.1 se muestra un sistema compuesto por materiales a y b, El material "a" (b) tiene difusividad y conductividad térmica $D_a(D_b)$ y $k_a(k_b)$, respectivamente.

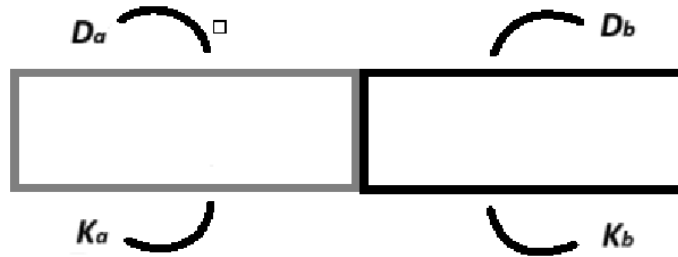


Figura 4.1: Ilustración una barra compuesta de dos materiales.

El desarrollo teórico que describiremos a continuación es un trabajo original, resultado de un esfuerzo por analizar la propagación entre dos medios en el dominio del tiempo. Pedimos al lector paciencia en la lectura de este material, ya que este procedimiento algebraico representa una contribución importante de esta tesis

4.1. Análisis teórico de interfase entre dos medios

La barra está compuesta de dos materiales diferentes, por lo que la difusividad térmica es una función a trozos de la forma,

$$D(x) = \begin{cases} D_a & 0 < x < l_a \\ D_b & l_a < x < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

Y conductividad térmica,

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_a & 0 < x < l_a \\ \kappa_b & l_a < x < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

También podemos diferenciar la temperatura en ambas secciones de la siguiente forma,

$$T(x, t) = \begin{cases} T_a(x, t) & 0 < x < l_a \\ T_b(x, t) & l_a < x < \infty \end{cases} \quad (4.3)$$

Así como el flujo térmico:

$$q(x, t) = \begin{cases} q_a(x, t) & 0 < x < l_a \\ q_b(x, t) & l_a < x < \infty \end{cases} \quad (4.4)$$

En el primero material, podemos describir la temperatura como:

$$T_a(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n^a)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^a)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,a} + \alpha_{1,a}x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n^+ e^{(1+i)(x/d_n^a)} + a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^a)} \right] e^{in\omega_0 t} \quad (4.5)$$

Donde,

$$d_n^a = \sqrt{\frac{2D_a}{n\omega_0}} \quad (4.6)$$

De la misma a forma para el segundo material, tenemos,

$$T_b(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[b_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n^b)} + b_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^b)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b}x + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[b_n^+ e^{(1+i)(x/d_n^b)} + b_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^b)} \right] e^{in\omega_0 t} \quad (4.7)$$

Donde,

$$d_n^b = \sqrt{\frac{2D_b}{n\omega_0}} \quad (4.8)$$

Teniendo en cuenta la ecuación que describe el flujo de calor es,

$$q(x, t) = -\kappa \frac{\partial}{\partial x} T(x, t) \quad (4.9)$$

Sustituimos $T_a(x, t)$ en la ecuación 4.9 para obtener el flujo térmico del medio o material "a".

$$\begin{aligned} q_a(x, t) = & - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_a(1-i)}{d_n^a} \left[a_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n^a)} - a_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^a)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \kappa_a \alpha_{1,a} \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_a(1+i)}{d_n^a} \left[a_n^+ e^{(1+i)(x/d_n^a)} - a_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^a)} \right] e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Y de la misma manera, para el segundo material "b", sustituimos $T_b(x, t)$ en 4.9 para obtener:

$$\begin{aligned} q_b(x, t) = & - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1-i)}{d_n^b} \left[b_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n^b)} - b_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^b)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \kappa_b \alpha_{1,b} \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1+i)}{d_n^b} \left[b_n^+ e^{(1+i)(x/d_n^b)} - b_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^b)} \right] e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4.11)$$

4.2. Aplicación de condiciones de frontera para $T(x, t)$

4.2.1. Temperatura para $x = 0$

Como lo vimos anteriormente en $x = 0$ tenemos una condición de frontera $l(t)$ que corresponde al extremo izquierdo de la barra, de la forma,

$$l(t) = T_0 + \frac{\Delta T}{2} \cos(\omega_0 t + \xi)$$

Lo cual puede escribirse como,

$$l(t) = T_0 + \frac{\Delta T}{4} e^{+i(\omega_0 t + \xi)} + \frac{\Delta T}{4} e^{-i(\omega_0 t + \xi)} \quad (4.12)$$

Y nos es conveniente plantearlo de la siguiente manera,

$$l(t) = \left(\frac{\Delta T}{4} e^{-i\xi} \right) e^{-i\omega_0 t} + T_0 + \left(\frac{\Delta T}{4} e^{+i\xi} \right) e^{+i\omega_0 t} \quad (4.13)$$

La condición de frontera en $x = 0$ es,

$$l(t) = T_a(x = 0, t) \quad (4.14)$$

Con lo cual tenemos la ecuación,

$$\left(\frac{\Delta T}{4} e^{-i\xi} \right) e^{-i\omega_0 t} + T_0 + \left(\frac{\Delta T}{4} e^{+i\xi} \right) e^{+i\omega_0 t} =$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} [a_{-n}^+ + a_{-n}^-] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,a} + \sum_{n=1}^{n=\infty} [a_n^+ + a_n^-] e^{in\omega_0 t} \quad (4.15)$$

De esta manera, identificamos para $n = 1$ como factor común de $e^{-i\omega_0 t}$,

$$a_{-1}^+ + a_{-1}^- = \frac{\Delta T}{4} e^{-i\xi}, \quad (4.16)$$

con $n > 1$ para el factor $e^{-in\omega_0 t}$ tenemos,

$$a_{-n}^+ + a_{-n}^- = 0, \quad (4.17)$$

El término constante es,

$$\alpha_{0,a} = T_0 \quad (4.18)$$

Para $n = 1$, para el factor común $e^{i\omega_0 t}$ tenemos,

$$a_1^+ + a_1^- = \frac{\Delta T}{4} e^{i\xi} \quad (4.19)$$

Finalmente, para $n > 1$, para el factor común $e^{in\omega_0 t}$ tenemos,

$$a_n^+ + a_n^- = 0 \quad (4.20)$$

4.2.2. Temperatura para $x > l_a$

Consideremos la ecuación,

$$T_b(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[b_{-n}^+ e^{(1-i)(x/d_n^b)} + b_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^b)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b} x \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[b_n^+ e^{(1+i)(x/d_n^b)} + b_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^b)} \right] e^{in\omega_0 t}$$

Debido a que la fuente de calor esta en $x = 0$, no esperamos que la temperatura en el medio "b" para las posiciones $x > l_a$ crezcan, su no que la temperatura decaiga, se requiere que,

$$b_{-n}^+ = b_n^+ = 0 \quad (4.21)$$

Así, la ecuación se reduce a,

$$T_b(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} b_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^b)} e^{-in\omega_0 t} + \langle T_b(x, t) \rangle + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^b)} e^{in\omega_0 t} \quad (4.22)$$

Donde,

$$\langle T_b(x, t) \rangle = \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b}x \quad (4.23)$$

El flujo térmico es de la forma,

$$q_b(x, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1-i)}{d_n^b} b_{-n}^- e^{-(1-i)(x/d_n^b)} e^{-in\omega_0 t} + \kappa_b \alpha_{1,b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1+i)}{d_n^b} b_n^- e^{-(1+i)(x/d_n^b)} e^{in\omega_0 t} \quad (4.24)$$

4.3. Condición de frontera en $x = l_a$.

4.3.1. Continuidad de $T(x, t)$

$$T_a(x = l_a, t) = T_b(x = l_a, t) \quad (4.25)$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_{-n}^+ e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,a} + \alpha_{1,a}l_a \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n^+ e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} + a_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} \right] e^{in\omega_0 t} = \\ & \sum_{n=1}^{n=\infty} b_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} e^{-in\omega_0 t} + \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b}l_a + \sum_{n=1}^{n=\infty} b_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} e^{in\omega_0 t} \end{aligned}$$

Esta ecuación plantea las siguientes igualdades.

Análisis de casos

- Caso $e^{-in\omega_0 t}$

$$a_{-n}^+ e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} + a_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} = b_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} \quad (4.26)$$

- Caso no oscilatorio

$$\alpha_{0,a} + \alpha_{1,a} l_a = \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b} l_a \quad (4.27)$$

- Caso $e^{in\omega_0 t}$

$$a_n^+ e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} + a_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} = b_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} \quad (4.28)$$

4.3.2. Continuidad de $q(x, t)$

$$q_a(x = l_a, t) = q_b(x = l_a, t) \quad (4.29)$$

Así tenemos,

$$\begin{aligned} q_a(x, t) = & - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_a(1-i)}{d_n^a} \left[a_{-n}^+ e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} - a_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} \right] e^{-in\omega_0 t} + \kappa_a \alpha_{1,a} \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_a(1+i)}{d_n^a} \left[a_n^+ e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} - a_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} \right] e^{in\omega_0 t} = \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1-i)}{d_n^b} b_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} e^{-in\omega_0 t} + \kappa_b \alpha_{1,b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\kappa_b(1+i)}{d_n^b} b_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} e^{in\omega_0 t} \quad (4.31)$$

Análisis de casos

- $e^{-in\omega_0 t}$

$$-\frac{\kappa_a}{d_n^a} \left[a_{-n}^+ e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} - a_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} \right] = \frac{\kappa_b}{d_n^b} b_{-n}^- e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} \quad (4.32)$$

- Caso no oscilatorio

$$\kappa_a \alpha_{1,a} = \kappa_b \alpha_{1,b} \quad (4.33)$$

■ $e^{i\omega_0 t}$

$$-\frac{\kappa_a}{d_n^a} \left[a_n^+ e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} - a_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} \right] = \frac{\kappa_b}{d_n^b} b_n^- e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} \quad (4.34)$$

4.3.3. Determinación de coeficientes

Caso $e^{-i\omega_0 t}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{(1-i)(l_a/d_1^a)} & e^{-(1-i)(l_a/d_1^a)} & -e^{-(1-i)(l_a/d_1^b)} \\ -\frac{\kappa_a}{d_1^a} e^{(1-i)(l_a/d_1^a)} & +\frac{\kappa_a}{d_1^a} e^{-(1-i)(l_a/d_1^a)} & -\frac{\kappa_b}{d_1^b} e^{-(1-i)(l_a/d_1^b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-1}^+ \\ a_{-1}^- \\ b_{-1}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta T}{4} e^{-i\xi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Caso $e^{-i\omega_0 t}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} & e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} & -e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} \\ -\frac{\kappa_a}{d_n^a} e^{(1-i)(l_a/d_n^a)} & +\frac{\kappa_a}{d_n^a} e^{-(1-i)(l_a/d_n^a)} & -\frac{\kappa_b}{d_n^b} e^{-(1-i)(l_a/d_n^b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{-n}^+ \\ a_{-n}^- \\ b_{-n}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Caso $e^{i\omega_0 t}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{(1+i)(l_a/d_1^a)} & e^{-(1+i)(l_a/d_1^a)} & -e^{-(1+i)(l_a/d_1^b)} \\ -\frac{\kappa_a}{d_1^a} e^{(1+i)(l_a/d_1^a)} & +\frac{\kappa_a}{d_1^a} e^{-(1+i)(l_a/d_1^a)} & -\frac{\kappa_b}{d_1^b} e^{-(1+i)(l_a/d_1^b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^+ \\ a_1^- \\ b_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta T}{4} e^{i\xi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Caso $e^{i\omega_0 t}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} & e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} & -e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} \\ -\frac{\kappa_a}{d_n^a} e^{(1+i)(l_a/d_n^a)} & +\frac{\kappa_a}{d_n^a} e^{-(1+i)(l_a/d_n^a)} & -\frac{\kappa_b}{d_n^b} e^{-(1+i)(l_a/d_n^b)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^+ \\ a_n^- \\ b_n^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

4.4. Construcción de la solución.

Retomamos la expresión:

$$T(x, t) = \begin{cases} T_a(x, t) & 0 < x < l_a \\ T_b(x, t) & l_a < x < \infty \end{cases} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} T_a(x, t) - \langle T_a(x, t) \rangle = & \left[a_{-1}^+ e^{(1-i)(x/d_1^a)} + a_{-1}^- e^{-(1-i)(x/d_1^a)} \right] e^{-i\omega_0 t} \\ & + \left[a_1^+ e^{(1+i)(x/d_1^a)} + a_1^- e^{-(1+i)(x/d_1^a)} \right] e^{i\omega_0 t} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Donde:

$$\langle T_a(x, t) \rangle = \alpha_{0,a} + \alpha_{1,a} x \quad (4.41)$$

De la misma a forma tenemos

$$T_b(x, t) - \langle T_b(x, t) \rangle = b_{-1}^- e^{-(1-i)(x/d_1^b)} e^{-i\omega_0 t} + b_1^- e^{-(1+i)(x/d_1^b)} e^{i\omega_0 t} \quad (4.42)$$

$$\langle T_b(x, t) \rangle = \alpha_{0,b} + \alpha_{1,b} x \quad (4.43)$$

Estas construcciones de la solución general a la ecuación unidimensional de calor describen el comportamiento de la temperatura de una barra compuesta de dos materiales distintos. En la fig. 4.2 se muestran dos gráficas y cada una cuenta con tres curvas en las cuales representan el comportamiento de la temperatura en función de la posición, las curvas punteadas representan la temperatura de una barra homogénea desarrolladas con nuestra solución general 2.1 de color azul para una barra homogénea de aluminio y rojo para acero, en la curva lineal muestra el comportamiento de la temperatura en una barra compuesta de aluminio y acero, esta curva está descrita por la construcción de las ecuaciones 4.40 y 4.42.

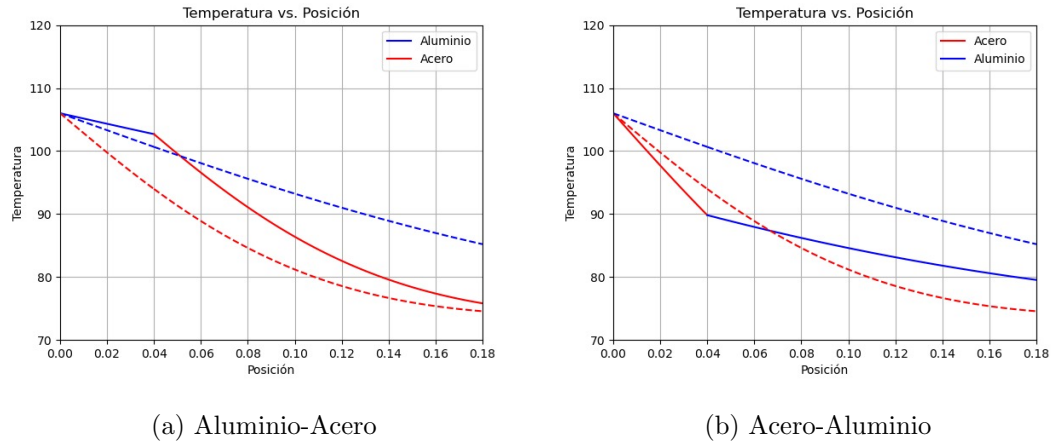


Figura 4.2: Gráficas de temperatura en función de la posición obtenidas teóricamente.

Es evidente que existe una variación entre las curvas homogéneas y la curva de los dos materiales combinados. Esta diferencia en el comportamiento de la temperatura entre las barras homogéneas y la barra compuesta de dos materiales da razón a el fenómeno de transmisión y reflexión de ondas térmicas.

4.5. Ajuste teorico experimental

Para describir teóricamente cómo varía la temperatura en este sistema de dos materiales, nos apoyamos en las ecuaciones que obtuvimos previamente. Estas ecuaciones nos permiten entender y predecir cómo cambia la temperatura a lo largo del sistema compuesto, que ilustramos en la fig. 4.3.

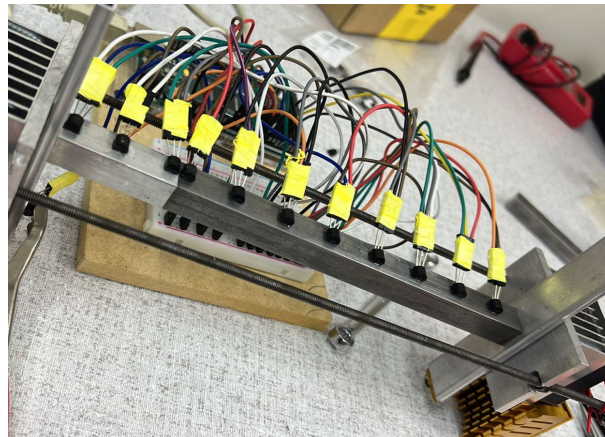


Figura 4.3: Barra compuesta de dos materiales, aluminio seguido de acero.

Podemos ver que en las ecuaciones mencionadas anteriormente, (4.40) y (4.42), contamos con

coeficientes indeterminados a_{-1}^+ , a_{-1}^- , a_1^+ , a_1^- , b_{-1}^- y b_1^- . Estos coeficientes pueden ser encontrados resolviendo las matrices (4.35) y (4.37).

El análisis teórico-experimental se llevó a cabo utilizando una herramienta de programación llamada Jupyter Notebook, que utiliza el lenguaje Python. Esta moderna herramienta es especialmente útil debido a su facilidad para realizar cálculos matemáticos y visualizar los resultados. Esta sección del proceso de análisis de datos podemos verlo en el código (A.4), este muestra un cálculo para obtener los coeficientes indeterminados, el cual se encuentra en el apéndice.

4.5.1. Proceso de ajuste teórico-experimental.

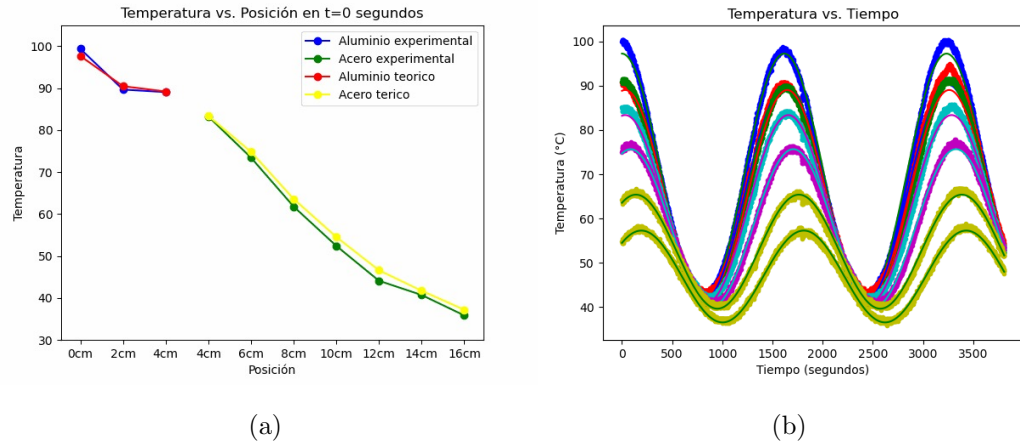
El proceso de ajuste teórico-experimental es crucial para esta investigación, ya que permite validar nuestro modelo teórico mediante la comparación con datos experimentales. Este proceso implica la creación de un código computacional que integre los datos experimentales con los resultados teóricos, generando una representación gráfica que relaciona la temperatura con la posición.

Para llevar a cabo este ajuste, se emplea la herramienta "scipy.optimize.curve fit", que facilita el ajuste de curvas teóricas a datos experimentales. Esta función ajusta los parámetros del modelo teórico para minimizar la discrepancia entre los datos experimentales y la curva teórica ajustada. El proceso se realiza iterativamente hasta alcanzar un buen ajuste.

En la figura 4.4 se generan dos gráficas. En (a), se muestra la temperatura en función de la posición en una barra compuesta de aluminio y acero, donde se superponen los datos experimentales con los datos teóricos. En (b), se ilustra el comportamiento de la temperatura en función del tiempo, de igual manera se muestran datos experimentales superpuestos a datos teóricos, donde cada curva representa una posición diferente en la barra compuesta por aluminio seguida de acero. Estas gráficas proporcionan una visualización clara del grado de concordancia entre el modelo teórico y los datos experimentales.

Es importante destacar que los parámetros obtenidos que describen las propiedades de los materiales, como la capacidad calorífica, densidad, conductividad térmica y difusividad térmica, fueron recopilados a partir de tablas de datos experimentales. Es necesario señalar que estos valores pueden no corresponder exactamente a las características de los materiales utilizados en el experimento.

Además, es fundamental tener en cuenta que los datos experimentales pueden presentar un margen de error inherente. Este margen de error puede atribuirse al uso del sensor de tempe-



(a)

(b)

Figura 4.4: Ajuste teórico-Experimental

ratura LM35, el cual introduce cierta imprecisión al momento de tomar las lecturas de datos. Aunque se han tomado medidas para minimizar este margen de error, es importante reconocer su existencia y considerar su posible impacto en los resultados obtenidos. Aun así, nuestro ajuste teórico-experimental ha mostrado una excelente concordancia entre los datos teóricos y los datos obtenidos experimentalmente. Esta consistencia nos permite concluir que nuestro modelo teórico describe de manera precisa el experimento realizado.

Conclusiones

En la presente tesis de maestría hemos explorado el comportamiento de las ondas térmicas en un sistema compuesto por una barra de aluminio y acero, siguiendo un método experimental diseñado en mi tesis de licenciatura y ajustado para un mejor funcionamiento. Basándose en la premisa teórica de encontrar una solución para la ecuación unidimensional de calor, este estudio ha logrado una fusión significativa entre teoría y práctica experimental.

Este proyecto de tesis nos dio la oportunidad de desarrollar una perspectiva original para comprender tanto experimentalmente, como a partir de un modelo teórico cómo evoluciona la temperatura en una barra compuesta de dos materiales, como una función del espacio y del tiempo, cuando existe una fuente de calor periódica, donde las oscilaciones de temperatura están determinadas por la solución de la ecuación de calor y sujetas a las condiciones de frontera.

Desde el punto de vista experimental, desarrollamos un experimento usando arduino que nos permite controlar tanto la fuente de calor oscilante con Puente H, como la lectura de los detectores de temperatura. La captura de datos fue realizada directamente en Python usando programas propios. Cabe recalcar que para la realización de este experimento no usamos ningún equipo de la universidad, sino que poco a poco fuimos adquiriendo los elementos necesarios. Afortunadamente, la tecnología arduino es de bajo precio comercial, pero al mismo tiempo de gran valor pedagógico, ya que hacer funcionar toda la electrónica implica un buen entendimiento de las componentes.

Los experimentos realizados han permitido obtener resultados sobre la propagación de ondas térmicas en la frontera entre dos medios. La precisión de los datos recabados y el análisis teórico-experimental han demostrado la validez del modelo teórico propuesto para describir estos fenómenos dentro de los parámetros y las condiciones estudiadas.

Es crucial resaltar la importancia de que este trabajo experimental demuestra un gran esfuerzo de aprendizaje en electrónica y programación, áreas para las cuales no necesariamente uno ha sido preparado a partir de las materias curriculares del programa de maestría en ciencias (física). Este trabajo evidencia un gran esfuerzo individual para desarrollar una estrategia original de diseño experimental, lo cual requirió invertir largas horas de trabajo e investigación autodidacta. Por ejemplo, para los ajustes metodológicos implementados desde la etapa de diseño hasta la ejecución experimental, se incluyó la utilización de tecnologías de medición mejoradas y la

consideración crítica de posibles fuentes de error, como las limitaciones del sensor de temperatura LM35. A pesar de los desafíos inherentes a cualquier medición experimental, los resultados obtenidos han mostrado una excelente concordancia con las predicciones teóricas, reafirmando la validez del modelo y su capacidad para prever con precisión los comportamientos térmicos en interfaces de diferentes materiales.

Esta investigación no solo valida con éxito la existencia y las características de las ondas térmicas en el contexto estudiado, sino que también enriquece el campo de la física del calor con datos experimentales y teóricos que permiten una mejor comprensión de la propagación de ondas en la interfaz de dos materiales. Por eso considero que este trabajo contribuye al avance del conocimiento en la física de la conductividad térmica y puede establecer bases para futuras investigaciones que exploren nuevas aplicaciones y mejoren las técnicas existentes en el estudio de la propagación de ondas térmicas en materiales homogéneos o compuestos.

Apéndice

A.1. Código Arduino MEGA2560 para sensores LM35

```
1 float tempC0;
2 int pinLM350 = 0; // Variable del pin de entrada del sensor (A0)
3
4 void setup() {
5     // Configuramos el puerto serial a 9600 bps
6     Serial.begin(9600);
7 }
8 void loop() {
9     tempC0 = analogRead(pinLM350);
10 ;
11     tempC0 = (5.0 * tempC0 * 100.0)/1024.0;
12
13     Serial.print(tempC0);
14     Serial.print("\t");
15     Serial.print("\n");
16
17     // Esperamos un tiempo para repetir el loop
18     delay(1000);
19 }
```

Codigo A.1: Código Arduino MEGA2560 para sensores LM35

A.2. Código Arduino para controlar Puente H y visualización en pantalla OLED.

```
1 #include <Wire.h>
2 #include <Adafruit_GFX.h> // libreria para pantallas graficas
3 #include <Adafruit_SSD1306.h> // libreria para controlador SSD1306
4
5 double periodo; // Periodo en segundos
```

```
6 double steps;    // Pasos en el periodo
7 int voltaje;
8 int voltajeH;
9 double pms;      // Periodo en milisegundos
10 int _delay;
11
12 int speed;
13 double t = 0.0;
14 double angulo;
15 double delta_angulo;
16 unsigned long previousMillis = 0; // Variable para almacenar el tiempo anterior
17
18 int R_IS = 7;
19 int R_EN = 2;
20 int R_PWM = 5;
21 int L_IS = 4;
22 int L_EN = 3;
23 int L_PWM = 6;
24
25 int potPin = A0; // Pin anal gico conectado al potencimetro
26 int potPin2 = A1; // Pin anal gico conectado al potencimetro
27
28 #define OLED_RESET 4 // necesario por la libreria pero no usado
29 Adafruit_SSD1306 oled(128, 64); // crea objeto
30 int anteriorMillis = 0;
31 int tiempo = 0;
32 float graficaVoltaje = 0;
33
34 int x[128]; //buffer de la grafica
35 int y[128]; //buffer secundario de la grafica
36
37 void setup() {
38     delay(100); // se da una espera de 100ms para que el display inicie
                 // correctamente
39     oled.begin(SSD1306_SWITCHCAPVCC, 0x3C); // inicia la comunicacion I2C con el
                 // display que tiene la direccion 0x3C
40     oled.setRotation(0); // se escoje la orientacion del display puede ser 0 o 2
41     oled.dim(true); //dejamos el brillo en maximo
42     oled.setTextColor(WHITE);
```

```
43 oled.setTextSize(1); // ajusta el tamaño de texto en el mínimo valor
44
45 oled.begin(SSD1306_SWITCHCAPVCC, 0x3C); // inicializa pantalla con dirección 0x3C
46 pinMode(R_IS, OUTPUT);
47 pinMode(R_EN, OUTPUT);
48 pinMode(R_PWM, OUTPUT);
49 pinMode(L_IS, OUTPUT);
50 pinMode(L_EN, OUTPUT);
51 pinMode(L_PWM, OUTPUT);
52 digitalWrite(R_IS, LOW);
53 digitalWrite(L_IS, LOW);
54 digitalWrite(R_EN, HIGH);
55 digitalWrite(L_EN, HIGH);
56 Serial.begin(9600);
57
58 }
59
60 void loop() {
61   oled.clearDisplay(); //limpia el buffer del display
62
63   //dibuja escala
64   oled.setCursor(0, 0);
65   oled.print(F("12V"));
66
67   oled.setCursor(0, 14);
68   oled.print(F("9V"));
69   oled.setCursor(0, 27);
70   oled.print(F("6V"));
71
72   oled.setCursor(0, 42);
73   oled.print(F("3V"));
74
75   oled.drawLine(15, 0, 25, 0, WHITE);
76   oled.drawLine(15, 14, 25, 14, WHITE);
77   oled.drawLine(15, 27, 25, 27, WHITE);
78   oled.drawLine(15, 40, 25, 40, WHITE);
79
80   //dibuja eje X y Y
81   oled.drawLine(0, 53, 127, 53, WHITE);
```

```

82 oled.drawLine(25, 53, 25, 0, WHITE);
83
84 // Lectura del valor del potencimetro
85 int potValue = analogRead(potPin); //lee el valor analogico del pin A0
86 voltaje=(potValue*13)/1024; //calcula el valor en voltaje
87 graficaVoltaje= map(speed,0,255,53,0); //escala el valor analogico a un
88
89 x[127]=graficaVoltaje; //asigna el valor escalado a el ultimo dato de la matriz
90
91 for(int i=127;i>=25;i--){
92     oled.drawPixel(i, x[i], WHITE); //dibuja punto a punto el contenido de x
93     y[i-1]=x[i]; //guarda la informacion desplazada una posicion temporalmente en
94     y
95 }
96 oled.display(); //despliega la informacion del buffer en la pantalla
97 for(int i=127;i>=0;i--){
98     x[i]=y[i]; //envia los datos desplazados de vuelta a la variable x
99
100 int potValue2 = analogRead(potPin2);
101 int potValue3 = analogRead(potPin);
102 // Mapeo del valor del potencimetro al rango de 0 a 255 para voltaje
103 voltajeH = map(potValue3, 0, 1023, 0, 255);
104 periodo = map(potValue2, 0, 1023, 10, 1600);
105 steps = map(potValue2, 0, 1023, 10, 1600);
106
107 pms = periodo * 1000.0;
108 _delay = int(pms / steps);
109 delta_angulo = 2.0 * PI / steps;
110
111 // Obtener el tiempo actual usando millis()
112 unsigned long currentMillis = millis();
113
114 // Verifica si ha pasado el tiempo necesario
115 if (currentMillis - previousMillis >= _delay) {
116     // Guarda el tiempo actual para la proxima comparacion
117     previousMillis = currentMillis;
118
119     // Calcula la se al PWM
120     speed = int(voltajeH * (0.5 - 0.5 * cos(angulo)));

```

```
120     analogWrite(R_PWM, speed);
121     analogWrite(L_PWM, 0);
122
123     // Actualiza los valores
124     angulo = angulo + delta_angulo;
125     t = t + periodo / steps;
126
127     // Verifica si angulo ha superado el rango y reinicia si es necesario
128     if (angulo > 2 * PI) {
129         angulo = 0.0;
130     }
131     // Agregar un retardo de 1 segundo
132     //delay(1000);
133     //imprime el voltaje en texto
134     oled.setCursor(25, 57);
135     oled.print(voltaje);
136     oled.print(F(" v    "));
137
138     //imprime el tiempo que se tarda en tomar y mostrar cada dato
139     tiempo = millis()-anteriorMillis;
140     oled.print(periodo);
141     anteriorMillis = millis();
142     oled.print(F(" s"));
143
144     oled.display(); //despliega la informacion del buffer en la pantalla
145
146     //delay(60); //pausa opcional
147
148     for(int i=127;i>=0;i--){
149         x[i]=y[i]; //envia los datos desplazados de vuelta a la variable x
150     }
151 }
152
153 }
154
155 }
```

Código A.2: Código para controlar Puente H y pantalla oled con potenciómetros.

A.3. Código toma de datos Python.

```

1 import serial
2
3 serialport = serial.Serial('COM5',baudrate=9600, timeout=1.5)
4
5 textfile = open('Datos.txt','w')
6
7 for i in range(1,7000):
8     arduinodata = serialport.readline().decode('ascii')
9     print(i,arduinodata)
10    textfile.write(arduinodata)
11
12 textfile.close()

```

Codigo A.3: Codigo Spyder-Pyton para toma de datos.

A.4. Calculo en python para encontrar coeficientes a_{-1}^+ , a_{-1}^- , a_1^+ , a_1^- , b_{-1}^- y b_1^- .

```

1 # Definir la matriz 1 de coeficientes
2 A = np.array([[1, 1, 0],
3              [np.exp((1-im)*(la/dl_a)), np.exp(-(1-im)*(la/dl_a)), -np.exp(-(1-im)
4              *(la/dl_b))],
5              [-k_a/dl_a * np.exp((1-im)*(la/dl_a)), k_a/dl_a * np.exp(-(1-im)*(la/
6              dl_a)), -k_b/dl_b * np.exp(-(1-im)*(la/dl_b))]])
7
8 # Definir el vector del lado derecho
9 b = np.array([[DT_ojo/4 * np.exp(-im*epsi)],
10             [0],
11             [0]])
12
13 # Resolver el sistema de ecuaciones
14 x = np.linalg.solve(A, b)
15
16 # Definir la matriz 2
17 A2 = np.array([[1, 1, 0],
18               [np.exp((1+im)*(la/dl_a)), np.exp(-(1+im)*(la/dl_a)), -np.exp(-(1+im)
19               *(la/dl_b))],
20               [-k_a/dl_a * np.exp((1+im)*(la/dl_a)), k_a/dl_a * np.exp(-(1+im)*(la/
21               dl_a)), -k_b/dl_b * np.exp(-(1+im)*(la/dl_b))]])

```

```
15 # Definir el vector del lado derecho
16 b2 = np.array([[DT_ojo/4 * np.exp(im*epsi)],
17               [0],
18               [0]])
19 # Resolver el sistema de ecuaciones para la segunda ecuaci n
20 x2 = np.linalg.solve(A2, b2)
```

Codigo A.4: Calculo para encontrar coeficientes

Bibliografía

- [1] New method of determining the thermal conductivity of bodies The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 25.166 (1863): 130-142. A. J. Angström New method of determining the thermal conductivity of bodies The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 25.166 (1863): 130-142. A. J. Angström
- [2] Bodas, A., Gandia, V., López-Baeza, E. (1998). An undergraduate experiment on the propagation of thermal waves. *American Journal of Physics*, 666528533.
- [3] Beardo, A., López-Suárez, M., Pérez, L. A., Sendra, L., Alonso, M. I., Melis, C., Reparaz, J. S. (2021). Observation of second sound in a rapidly varying temperature field in Ge. *Science advances*, 7(27), eabg4677.
- [4] Sabieh Anwar, M., Alam, J., Wasif, M., Ullah, R., Shamim, S., Zia, W. (2014). Fourier analysis of thermal diffusive waves. *American Journal of Physics*, 82(10), 928-933.
- [5] Camacho Guillen Humberto (2022). "Ondas térmicas de difusión en una varilla metálica", *Universidad de Sonora*, 6623583260.
- [6] Pozo de metrología de campo Fluke Calibration 9173. (s/f). Fluke.com. Recuperado el 24 de febrero de 2024, de <https://www.fluke.com/es-mx/producto/herramientas-de-calibracion/calibradores-de-temperatura/fluke-calibration-9173>
- [7] Display Oled 0.96" 128*64 SSD1306. (s/f). Naylamp Mechatronics - Perú. Recuperado el 24 de febrero de 2024, de <https://naylampmechatronics.com/oled/850-display-oled-096-i2c-12864-ssd1306.html>

-
- [8] Llamas, L. (2019) Controla motores de Gran potencia con Arduino Y BTS7960, Luis Llamas. Available at: <https://www.luisllamas.es/controla-motores-de-gran-potencia-con-arduino-y-bts7960/> (Accessed: 23 February 2024).
- [9] Resistencia Incubadora Placa Calentadora Cerámica A 12 V en venta en Morelia Michoacán por sólo 199.00 - OCompra.com Mexico. (s. f.). Recuperado 22 de febrero de 2024, de <https://www.ocompra.com/mexico/item/resistencia-incubadora-placa-calentadora-ceramica-a-110-v-602037750/>
- [10] mcruzmay@inditer.es. (2022, 6 enero). ¿Cómo funciona un disipador de calor y para qué sirve? Inditer S.A. Recuperado 16 de octubre de 2022, de <https://inditer.es/blog/como-funciona-un-disipador-de-calor/>
- [11] LM35 - El sensor de temperatura más popular. (2018, 18 enero). HeTPro-Tutoriales. Recuperado 22 de febrero de 2024, de <https://hetpro-store.com/TUTORIALES/lm35/>
- [12] Carmenate, J. G. (2022, 13 enero). Arduino Nano el capo de la familia Arduino Nano. Programar fácil con Arduino. Recuperado 22 de febrero de 2024, de <https://programarfácil.com/blog/arduino-blog/familia-arduino-nano/>
- [13] Carmenate, J. G. (2022b, junio 24). Arduino Mega 2560 el hermano mayor de Arduino UNO. Programar fácil con Arduino. Recuperado 22 de febrero de 2024, de <https://programarfácil.com/blog/arduino-blog/arduino-mega-2560/>
- [14] Buksman, E. (2019). Experimentando con Arduino y Scilab: propagación de calor en una barra metálica (1.a ed., Vol. 41). SciELO Brasil.