Analisis de la ecuación de calor en una dimension

Se comienza con la ecuación de conservacion de energía

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} q(x,t) \qquad (1)$$

y la ecuación de Fourier

$$q(x,t) = -k \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) \qquad (2)$$

Planteamos ahora sustituir (2) en (1) de la forma

$$\rho C_p \frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[-k \frac{\partial}{\partial x} T(x,t)\right] = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)$$

Lo que nos permite escribir

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)}$$

Solucion analítica de la ecuación de calor 1D

Vamos a considerar una solución sencilla que se obtiene a partir de la separación de variables

$$\frac{\partial}{\partial t} T(x,t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,t)$$

Sea

$$T(x,t) = A(x)\,B(t)$$

$$\frac{1}{A(x)B(t)}\left[\frac{\partial}{\partial t} A(x)\,B(t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x)\,B(t)\right]$$

$$\frac{1}{\cancel{A(x)}B(t)} \frac{\partial}{\partial t} \cancel{A(x)}\,B(t) = D \frac{1}{A(x)\,\cancel{B(t)}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x)\cancel{B(t)}$$

$$\frac{1}{B(t)} \frac{\partial}{\partial t} B(t) = \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} B(t) = \alpha\, B(t)$$

$$D \frac{1}{A(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x) = \alpha \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x) = \frac{\alpha}{D} A(x)$$

¿Como se resuelve la parte temporal?

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t) = \alpha\, B(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t) = \alpha\, B(t)$$

Se pueden proponer tres opciones:

1) $\frac{\partial}{\partial t} B(t) = |\alpha| B(t)$; $|\alpha|$ es real

2) $\frac{\partial}{\partial t} B(t) = -|\alpha| B(t)$; $|\alpha|$ es real

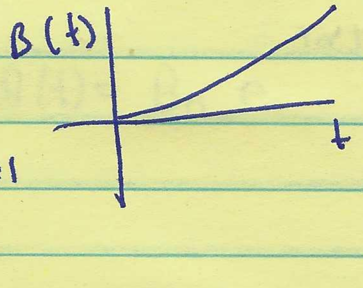
3) $\frac{\partial}{\partial t} B(t) = i\,|\alpha| B(t)$; $|\alpha|$ es real

ojo, aqui tambien podria ser una cuarta: $\boxed{\frac{\partial}{\partial t} B(t) = -i\,|\alpha| B(t)}$

pero NO analizaremos esto, ya que es una solución oscilatoria

1) En la opcion 1) tenemos

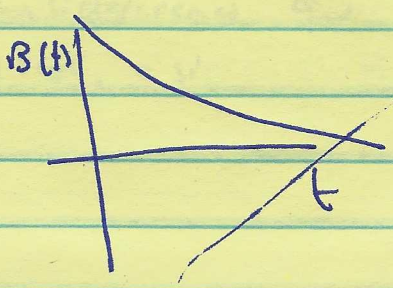
$$\frac{\partial}{\partial t} B(t) = |\alpha| B(t) \rightarrow \quad B(t) = B_0\, e^{|\alpha| t}$$



es una solución que crece en el tiempo.

2) En la opcion 2) tenemos

$$B(t) = B_0\, e^{-|\alpha| t}$$



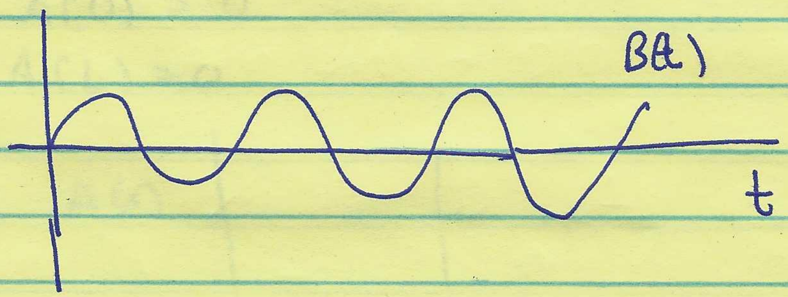
3) La tercera (cierta?) opcion seria

$$\frac{\partial}{\partial t} B(t) = i\,|\alpha|\,B(t)$$

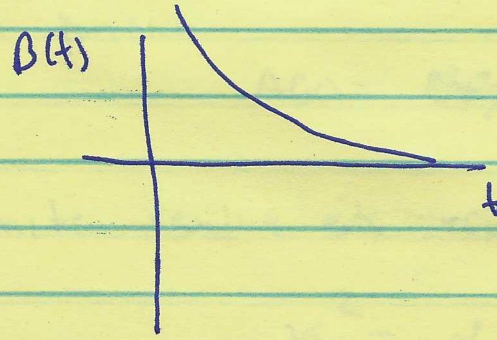
donde

$$B(t) = B_0\, e^{i|\alpha| t}$$

La solucion seria oscilatoria, de la forma



De estas tres opciones, escogemos la opción (2) en donde se espera que la solución decaiga con el tiempo, es decir



$$B(t) = B_0\, e^{-|\alpha| t}$$

Para que sea mas facil, consideraremos que $\alpha \to |\alpha|$ osea α es real y positivo, así

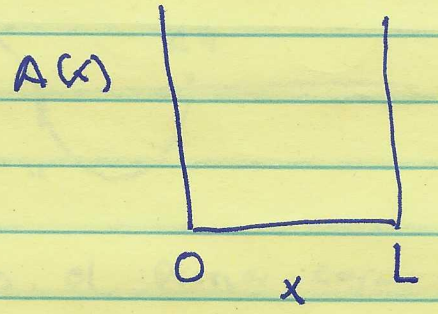
$$B(t) = B_0\, e^{-\alpha t}$$

Ahora consideramos la ecuación

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x) = \frac{\alpha}{D} A(x)$$

Aquí es necesario considerar dos condiciones de frontera. Lo más sencillo sería decir que en una cavidad $[0:L]$ tenemos

$$A(0) = 0$$
$$A(L) = 0$$



La función

$$A(x) = \text{sen}(Kx)$$

permite resolver esta ecuación. De esta forma

$$K^2 = \frac{\alpha}{D} \rightarrow K = \sqrt{\frac{\alpha}{D}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = D K^2}}$$

→ <u>La condición de frontera en $x=0$ y $x=L$</u>

Para la solucion

$$A(x) = A_0 \operatorname{sen}(Kx)$$

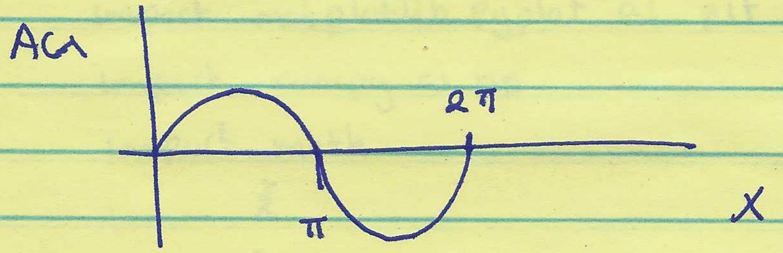
en $x=0$, NO obtenemos ninguna informacion adicional solo

$$A(0) = A_0 \operatorname{sen}(K0) = 0$$

PERO

$$A(L) = 0 = A_0 \operatorname{sen}(KL) = 0$$

Sí da informacion. Los ceros de la función seno son



Entonces, el primer cero ocurre en

$$KL = \pi \rightarrow \boxed{K = \frac{\pi}{L}}$$

Asi descubrimos que la solucion

$$T(x,t) = A(x)\,B(t)$$
$$= A_0 \operatorname{sen}(Kx)\, B_0\, e^{-\alpha t}$$

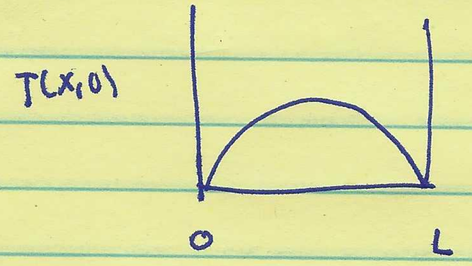
donde

$$K = \frac{\pi}{L} \quad y \quad \alpha = D\,\frac{\pi^2}{L^2}$$

asi tenemos

$$T(x,t) = T_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{L}x\right) e^{-D\frac{\pi^2}{L^2}t}$$

El primer programa es para $t=0$



La primer grafica se hace con

(Este programa esta en Dropbox/2024/09-2024/fdtd_heat-equation/programa2.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import math

L= 0.1
Nx= 100
xi= 0
xf= L
dx= (xf-xi)/Nx
x= np.zeros(Nx+1)
T= np.zeros(Nx+1)
T0= 1
K= math.pi/L
for ix in range(0,Nx+1):
    x[ix] = xi+ix*dx
    T[ix] = T0*mat.sin(K*x[ix])

plt.plot(x,T)
plt.show()
```