

Electrodinámica Computacional

Potencial electrostático de una carga puntual

Visualización 2D y 3D

1. Fundamento físico

El potencial electrostático generado por una carga puntual en tres dimensiones es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

En estas simulaciones trabajaremos en unidades donde:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$$

por lo que:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{r}$$

donde:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Propiedades físicas importantes:

- Simetría radial.
- Divergencia cuando $r \rightarrow 0$.
- Decaimiento como $1/r$ para grandes distancias.
- Las superficies equipotenciales son esferas (en 3D).
- En una sección 2D, las equipotenciales son círculos.

2. Regularización numérica

Numéricamente, en el origen:

$$r = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi \rightarrow \infty$$

Para evitar divergencias introducimos un parámetro pequeño:

$$r_\epsilon = \sqrt{x^2 + y^2 + \epsilon^2}$$

Entonces:

$$\phi = \frac{q}{r_\epsilon}$$

Interpretación:

- ϵ actúa como radio efectivo.
- Suaviza la singularidad.
- Permite estabilidad numérica.

3. Discretización del espacio

Discretizamos:

$$x, y \in [-2, 2]$$

usando N puntos por eje. Esto convierte el problema continuo en uno discreto.

4. Visualización 2D

Se representa:

$$\phi(x, y)$$

como:

- Mapa de color (valor escalar).

- Curvas de nivel (equipotenciales).

Físicamente:

- Las curvas de nivel son círculos concéntricos.
- Donde están más juntas, el gradiente es mayor.
- El campo eléctrico sería perpendicular a ellas.

5. Visualización 3D

Representamos:

$$z = \phi(x, y)$$

Esto muestra:

- Una superficie tipo “montaña” si $q > 0$.
- Un “pozo” si $q < 0$.
- El potencial decrece suavemente al alejarnos.

Las curvas de nivel 2D corresponden a cortes horizontales de esta superficie.

6. Inclusión de imágenes

Si guardamos las figuras como:

potencial_2D.png
potencial_3D.png

podemos incluirlas en el documento así:

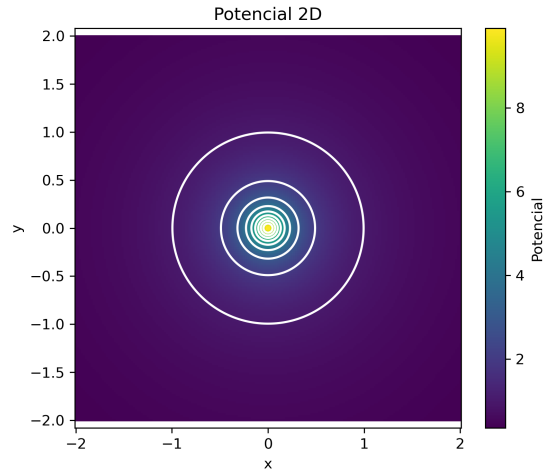


Figure 1: Mapa de color y equipotenciales del potencial.

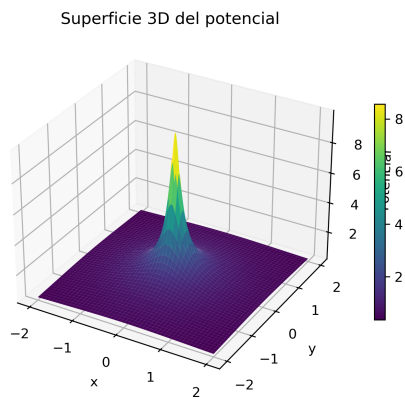


Figure 2: Superficie tridimensional del potencial.

7. Código completo para Jupyter

```
# =====
# POTENCIAL DE UNA CARGA PUNTUAL
# Visualización 2D y 3D
```

```

# =====

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# =====
# MALLA
# =====
N = 200

x = np.linspace(-2, 2, N)
y = np.linspace(-2, 2, N)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

# =====
# PAR METRO DE SUAVIZADO
# =====
epsilon = 0.1

# =====
# CARGA
# =====
q = 1.0
x0 = 0.0
y0 = 0.0

R = np.sqrt((X - x0)**2 + (Y - y0)**2 + epsilon**2)
phi = q / R

# =====
# GR FICA 2D
# =====
plt.figure(figsize=(6,5))

pcm = plt.pcolormesh(X, Y, phi, shading='auto', cmap='
viridis')
plt.contour(X, Y, phi, levels=10, colors='white')

```

```

plt.colorbar(pcm, label='Potencial')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Potencial 2D')
plt.axis('equal')

plt.savefig("potencial_2D.png", dpi=300)
plt.show()

# =====
# GR FICA 3D
# =====
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

surf = ax.plot_surface(X, Y, phi, cmap='viridis')

fig.colorbar(surf, shrink=0.6)

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('Potencial')
ax.set_title('Superficie 3D del potencial')

plt.savefig("potencial_3D.png", dpi=300)
plt.show()

```

8. Sugerencias y ejercicios

1. Cambiar el signo de la carga. ¿Cómo cambia la superficie?
2. Variar ϵ y analizar la suavización.
3. Aumentar la región espacial a $[-5, 5]$. ¿Cómo cambia la escala?
4. Graficar $\log_{10}(\phi)$ y comparar.
5. Calcular el campo eléctrico mediante:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

y verificar que es radial.

6. Comparar con la expresión analítica:

$$|\vec{E}| = \frac{q}{r^2}$$

7. Mostrar que las equipotenciales son perpendiculares al campo.

8. Reducir N y analizar efectos de resolución.

9. Investigar el comportamiento lejano:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \phi r = q$$

9. Conclusión

Este problema es emblemático porque:

- Conecta solución analítica y simulación numérica.
- Permite visualizar directamente un campo escalar.
- Introduce regularización.
- Prepara el camino hacia dipolos y distribuciones continuas.