

Dipolo Eléctrico: Potencial y Campo Eléctrico

1. Definición del sistema

Consideremos un dipolo eléctrico formado por dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto:

- Carga $+q$ ubicada en $y = +a$,
- Carga $-q$ ubicada en $y = -a$.

Ambas cargas se encuentran sobre el eje y . El sistema es eléctricamente neutro. Las posiciones de las cargas son:

$$\mathbf{r}_+ = (0, a), \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_- = (0, -a). \quad (2)$$

Sea el punto de observación arbitrario:

$$\mathbf{r} = (x, y).$$

—

2. Potencial electrostático del dipolo

El potencial electrostático debido a una carga puntual q es:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}.$$

Por superposición, el potencial total del dipolo es:

$$V(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{R_+} - \frac{q}{R_-} \right), \quad (3)$$

donde

$$R_+ = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}, \quad (4)$$

$$R_- = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}. \quad (5)$$

Por lo tanto, de forma explícita:

$$V(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + a)^2}} \right] \quad (6)$$

—

3. Cálculo del campo eléctrico a partir del potencial

El campo eléctrico se define como el gradiente negativo del potencial:

$$\mathbf{E} = -\nabla V.$$

En coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{E} = - \left(\frac{\partial V}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} \right).$$

—

3.1. Componente E_x

Derivando el potencial con respecto a x :

$$E_x(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (7)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{x}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} - \frac{x}{[x^2 + (y + a)^2]^{3/2}} \right). \quad (8)$$

—

3.2. Componente E_y

Derivando el potencial con respecto a y :

$$E_y(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad (9)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{y - a}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} - \frac{y + a}{[x^2 + (y + a)^2]^{3/2}} \right). \quad (10)$$

—

4. Campo eléctrico obtenido a partir del potencial

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x, y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} - \frac{(x, y + a)}{[x^2 + (y + a)^2]^{3/2}} \right] \quad (11)$$

5. Cálculo directo del campo eléctrico (Ley de Coulomb)

El campo eléctrico debido a una carga puntual es:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3}.$$

Aplicando superposición:

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_+}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_+|^3} - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_-}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_-|^3} \right). \quad (12)$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(x, y - a)}{[x^2 + (y - a)^2]^{3/2}} - \frac{(x, y + a)}{[x^2 + (y + a)^2]^{3/2}} \right] \quad (13)$$

6. Comparación de ambos enfoques

Ambos métodos producen exactamente el mismo campo eléctrico:

- Método 1: $\mathbf{E} = -\nabla V$
- Método 2: Ley de Coulomb + superposición

Esto confirma la consistencia interna de la electrostática clásica.

7. Límite dipolar ($r \gg a$)

Definiendo el momento dipolar:

$$\mathbf{p} = 2qa \hat{\mathbf{y}},$$

el potencial lejano es:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2},$$

y el campo eléctrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}]$$

8. Conclusiones

- El potencial es el objeto fundamental en electrostática.
- El campo eléctrico puede obtenerse rigurosamente como su gradiente.
- El cálculo directo del campo confirma el resultado obtenido a partir del potencial.