

Método de Cargas Imagen

Carga Puntual frente a un Plano Conductor

1 Planteamiento del Problema

Consideremos una carga puntual q ubicada en $(0, a)$ frente a un plano conductor infinito conectado a tierra:

$$\phi(x, 0) = 0$$

El objetivo es resolver la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

con la condición de frontera anterior.

2 Método de Cargas Imagen

El problema se resuelve introduciendo una carga imagen:

$$-q \quad \text{en} \quad (0, -a)$$

El potencial total en la región $y > 0$ es:

$$\phi(x, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

donde

$$r_1 = \sqrt{x^2 + (y - a)^2}$$

$$r_2 = \sqrt{x^2 + (y + a)^2}$$

Verificación de la Condición de Frontera

En $y = 0$:

$$r_1 = r_2$$

Por lo tanto:

$$\phi(x, 0) = 0$$

La condición de frontera se satisface exactamente.

3 Campo Eléctrico

El campo se obtiene de:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\phi}$$

En forma analítica:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right)$$

Las líneas de campo:

- Salen de la carga real.
- Entran perpendicularmente al plano.
- Se comportan como si hubiera una carga negativa debajo del plano.

4 Densidad Superficial Inducida

El campo normal al plano es:

$$E_y(x, 0^+) = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

La densidad inducida es:

$$\boxed{\sigma(x) = -\epsilon_0 E_y(x, 0^+)}$$

Este resultado puede obtenerse numéricamente.

5 Fuerza sobre la Carga

La fuerza sobre la carga real es equivalente a la interacción con la carga imagen:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2}$$

Es atractiva y dirigida hacia el plano.

6 Implementación Numérica

Para evitar divergencias en el origen usamos un parámetro de suavizado ϵ .

Código en Python

Este código genera la figura `carga_imagen.png`.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

N = 200

x = np.linspace(-2, 2, N)
y = np.linspace(-2, 2, N)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

epsilon = 0.05
q = 1.0
a = 0.8

# Carga real
R1 = np.sqrt(X**2 + (Y - a)**2 + epsilon**2)

# Carga imagen
R2 = np.sqrt(X**2 + (Y + a)**2 + epsilon**2)

phi = q/R1 - q/R2

dx = x[1] - x[0]
dy = y[1] - y[0]

dphidy, dphidx = np.gradient(phi, dy, dx)

Ex = -dphidx
Ey = -dphidy

plt.figure(figsize=(6,5))
```

```

pcm = plt.pcolormesh(X, Y, phi,
                    shading='auto',
                    cmap='viridis')

plt.axhline(0, color='white', linewidth=2)

step = 8

plt.quiver(X[::step, ::step],
          Y[::step, ::step],
          Ex[::step, ::step],
          Ey[::step, ::step],
          color='white',
          scale=60)

plt.colorbar(pcm, label='Potencial')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Carga Imagen frente a Plano Conductor')
plt.axis('equal')

plt.savefig("carga_imagen.png", dpi=300)
plt.show()

```

7 Resultado

8 Interpretación Física

- El potencial es cero en el plano.
- El campo es perpendicular al conductor.
- El plano adquiere carga inducida negativa.
- El problema satisface la ecuación de Laplace en $y > 0$.

9 Ejercicios

1. Verificar numéricamente que $\phi(x, 0) = 0$.
2. Calcular la densidad superficial inducida.
3. Estudiar la convergencia al variar N .
4. Calcular la fuerza numéricamente e compararla con la expresión analítica.
5. Extender el método a dos planos conductores.

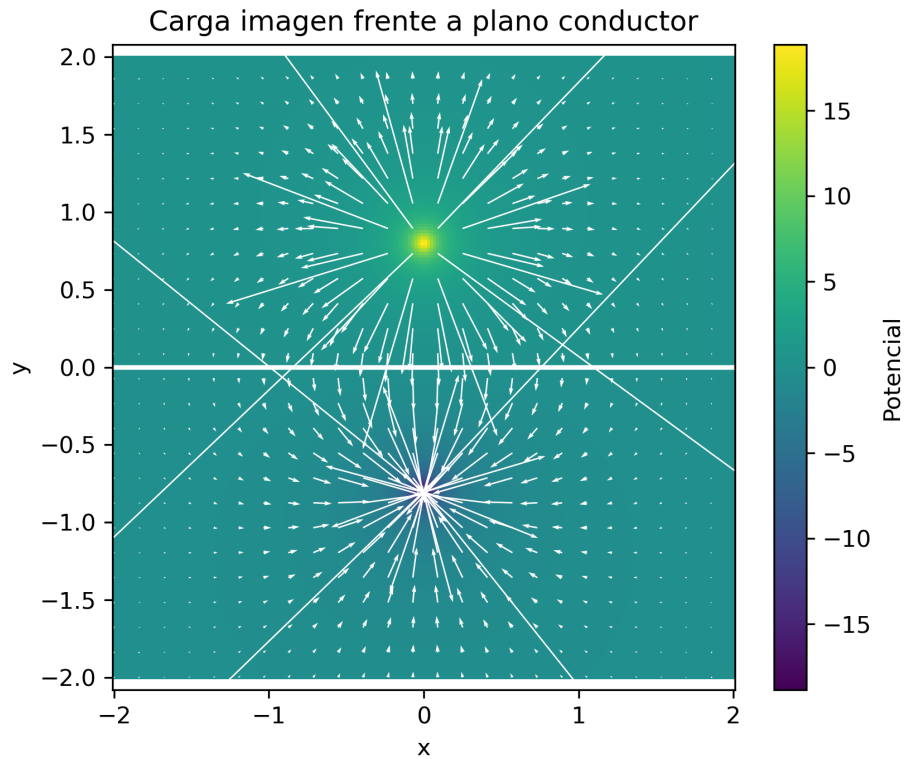


Figure 1: Potencial y campo eléctrico para una carga frente a un plano conductor.

10 Conclusión

El método de cargas imagen transforma un problema con condición de frontera en uno equivalente sin fronteras explícitas.

Este ejemplo es fundamental porque ilustra:

- Condiciones de frontera en electrostática.
- Unicidad de soluciones.
- Interpretación física del potencial.
- Implementación numérica del gradiente.