

Física del Dipolo Eléctrico: Del Modelo Exacto a la Aproximación Multipolar

Notas de Física Teórica y Computacional

27 de febrero de 2026

1. Introducción

Un **dipolo eléctrico** es un sistema compuesto por dos cargas puntuales de igual magnitud q pero de signos opuestos ($+q$ y $-q$), separadas por una distancia d . Este sistema es fundamental en la física de la materia, ya que describe desde la polarización de moléculas (como el H_2O) hasta la radiación de antenas.

El **momento dipolar eléctrico** $\mathbf{p}$ se define vectorialmente como:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (1)$$

donde $\mathbf{d}$ es el vector que apunta desde la carga negativa hacia la positiva.

2. El Potencial Eléctrico Exacto

Considerando un sistema donde las cargas se ubican en el eje z en $z = +d/2$ y $z = -d/2$, el potencial en un punto arbitrario $\mathbf{r}$ se obtiene por el principio de superposición:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) \quad (2)$$

donde r_+ y r_- son las distancias desde las cargas positiva y negativa, respectivamente, al punto de observación:

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad r_+ &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d/2)^2} \\ \blacksquare \quad r_- &= \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d/2)^2} \end{aligned}$$

3. Derivación del Potencial Analítico (Aproximación de Campo Lejano)

Cuando la distancia de observación es mucho mayor que la separación de las cargas ($r \gg d$), podemos utilizar una expansión multipolar.

Usando el teorema del coseno, la distancia r_+ se puede escribir como:

$$r_+ = \sqrt{r^2 + (d/2)^2 - rd \cos \theta} = r \left[1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \left(\frac{d}{2r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3)$$

Aplicando una expansión de Taylor para $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ y despreciando términos de orden superior a (d/r) , obtenemos el **Potencial Dipolar**:

$$\Phi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (4)$$

3.1. Perspectiva Física

- **Decaimiento:** Mientras que el potencial de una carga puntual decae como $1/r$, el del dipolo decae más rápido, como $1/r^2$. Esto se debe a que, desde lejos, las cargas tienden a cancelarse.^{entre sí.}
- **Asimetría:** El potencial tiene una dependencia angular ($\cos\theta$), lo que genera lóbulos de potencial positivo y negativo.

4. Campo Eléctrico Asociado

El campo eléctrico se obtiene mediante el gradiente negativo del potencial $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. En coordenadas esféricas, para un dipolo alineado con el eje z :

$$\mathbf{E}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (5)$$

Este campo es el responsable de las fuerzas de van der Waals en química y la interacción entre moléculas polares.

5. Análisis Numérico y Limitaciones

En una implementación computacional (Python/Matlab), la comparación entre Φ_{exacto} y $\Phi_{\text{analítico}}$ revela que:

1. **Cerca de las cargas** ($r \approx d$): El modelo analítico diverge o da errores significativos porque ignora términos de cuadrupolo y superiores.
2. **Singularidades:** El modelo exacto tiene dos singularidades (en las posiciones de las cargas), mientras que el analítico tiene una sola singularidad matemática en el origen ($r = 0$).
3. **Error Relativo:** El error disminuye proporcionalmente a $(d/r)^2$.

6. Ejemplo Práctico: La Molécula de Agua

La molécula de H_2O tiene un momento dipolar de aproximadamente $p \approx 6,2 \times 10^{-30}$ C·m. Al modelar el potencial eléctrico que siente un ion cercano, los biofísicos suelen usar la aproximación dipolar para acelerar los cálculos de dinámica molecular, ya que calcular el campo exacto de cada átomo es computacionalmente costoso.