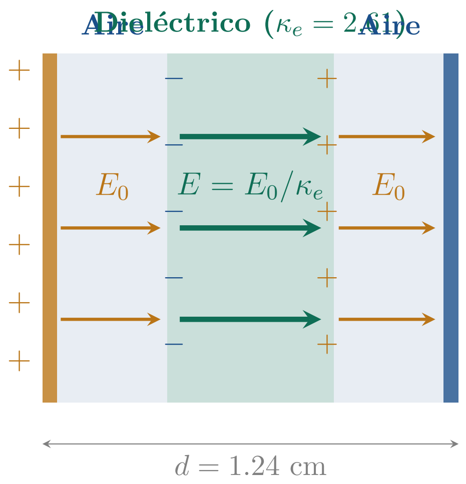
DERIVACIÓN DESDE PRIMEROS PRINCIPIOS

Capacitor con Dieléctrico Parcial

Problema 30-9 (Cap. 30)

Halliday, Resnick y Krane · Física Vol. 2 · 4ª Edición

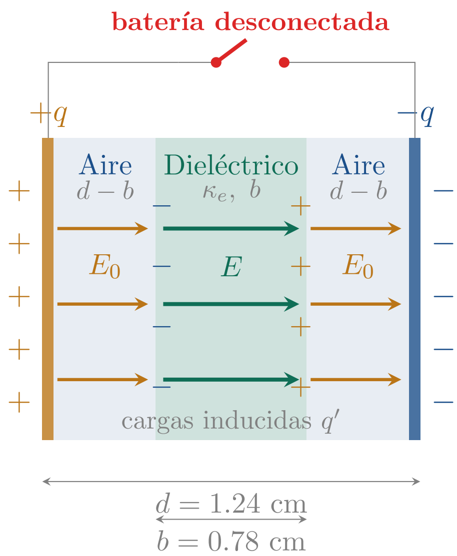


6 incisos **Derivaciones completas** **Ley de Gauss**

Contents

Planteamiento del problema

Un capacitor de placas paralelas tiene área A y separación d entre sus placas. Se aplica una diferencia de potencial V_0 con una batería. Después se **desconecta** la batería y se coloca una lámina dieléctrica de espesor b y constante dieléctrica κ_e entre las placas, como se indica.



Datos numéricos

Cantidad	Valor	En unidades SI
Área de las placas A	115 cm^2	115×10^{-4} m^2
Separación total d	1.24 cm	1.24×10^{-2} m
Espesor del dieléctrico b	0.78 cm	0.78×10^{-2} m
Constante dieléctrica κ_e	2.61	—
Voltaje inicial V_0	85.5 V	—

Incisos que se piden

Inciso	Pregunta
a)	¿Cuál es la capacitancia C_0 antes de introducir la lámina?
b)	¿Qué carga libre q aparece en las placas?
c)	¿Cuál es el campo eléctrico E_0 en las zonas de aire?
d)	¿Cuál es el campo eléctrico E dentro del dieléctrico?
e)	¿Cuál es la diferencia de potencial V' con la lámina?
f)	¿Cuál es la capacitancia C' con la lámina en su posición?

Inciso a) — Derivación de C_0 desde primeros principios

Campo eléctrico entre las placas (Ley de Gauss)

Construimos una superficie gaussiana rectangular que encierra únicamente la placa positiva con carga libre q. El campo eléctrico dentro del conductor es cero, por lo que el flujo solo contribuye en la cara interior:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_0 \, E \, A = q \tag{1}$$

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon_0 \, A}}$$

> Usamos $\kappa_e = 1$ porque en este inciso aún no hay dieléctrico. El campo solo depende de q y la geometría.

Diferencia de potencial y el signo de $\vec{E} = -\nabla\phi$

La relación fundamental entre campo y potencial es:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad \Longrightarrow \qquad E = -\frac{d\phi}{ds} \tag{2}$$

El signo negativo expresa que $\vec{E}$ apunta en la dirección en que ϕ *decrece*. Integrando de la placa positiva ($s = 0$) a la negativa ($s = d$):

$$V = \phi_+ - \phi_- = -\int_0^d \frac{d\phi}{ds}\, ds = -\int_0^d (-E)\, ds = \int_0^d E\, ds = E \cdot d \tag{3}$$

> El signo negativo aparece **dos veces** y se cancela. El resultado $V > 0$ confirma que la placa positiva está a mayor potencial.

Sustituyendo E:

$$V = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \cdot d \qquad \Longrightarrow \qquad C_0 = \frac{q}{V} = \frac{\varepsilon_0 \, A}{d} \tag{4}$$

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 \, A}{d} = \frac{(8.85 \times 10^{-12})(115 \times 10^{-4})}{1.24 \times 10^{-2}} = \boxed{8.21 \text{ pF}}$$

Inciso b) — Carga libre q en las placas

Condición física crucial: la batería se desconecta *antes* de insertar la lámina. La carga q queda atrapada y permanece **constante** en todos los incisos siguientes.

De la definición $C \equiv q/V$, despejando q:

$$q = C_0 \cdot V_0 = \frac{\varepsilon_0 \, A \, V_0}{d} \tag{5}$$

$$q = (8.21 \times 10^{-12}\ \mathrm{F})(85.5\ \mathrm{V}) = \boxed{702\ \mathrm{pC}}$$

Si la batería *permaneciera* conectada sería V el que se mantiene constante y q el que cambiaría al insertar la lámina. El caso opuesto a este problema.

Inciso c) — Campo eléctrico E_0 en las zonas de aire

Aplicamos la Ley de Gauss con dieléctrico a una superficie gaussiana que encierra la placa **positiva** ($+q$). La cara derecha de la superficie queda en la región de **aire** ($\kappa_e = 1$):

$$\varepsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \quad \xrightarrow{\kappa_e=1} \quad \varepsilon_0 E_0 A = q \tag{6}$$

$$E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{7.02 \times 10^{-10}}{(8.85 \times 10^{-12})(115 \times 10^{-4})} = \boxed{6.90\ \text{kV/m}}$$

Observación: este valor es *idéntico* al del inciso a). El campo en el aire no cambia al insertar la lámina porque solo depende de q, que es constante.

Inciso d) — Campo eléctrico E dentro del dieléctrico

Ahora la superficie gaussiana encierra la placa **negativa** ($-q$). La cara izquierda de la gaussiana queda *dentro* del dieléctrico ($\kappa_e = 2.61$).

Sutileza del signo

Dirección de $\vec{E}$ y $d\vec{A}$: en la cara izquierda de la gaussiana (d), $\vec{E}$ apunta hacia la derecha (de $+q$ a $-q$), pero $d\vec{A}$ apunta hacia la **izquierda** (normal exterior). Por tanto $\vec{E} \cdot d\vec{A} < 0$, consistente con carga encerrada $-q$.

Aplicando Ley de Gauss:

$$\varepsilon_0 \oint \kappa_e \, \vec{E} \cdot d\vec{A} = -q \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon_0 \, \kappa_e \, (-E) \, A = -q \tag{7}$$

Los negativos se cancelan:

$$\varepsilon_0 \, \kappa_e \, E \, A = q \quad \Longrightarrow \quad E = \frac{q}{\kappa_e \, \varepsilon_0 \, A} = \frac{E_0}{\kappa_e} \tag{8}$$

$$E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90 \text{ kV/m}}{2.61} = \boxed{2.64 \text{ kV/m}}$$

El factor κ_e en la Ley de Gauss ya contabiliza *implícitamente* las cargas inducidas $q' = -433$ pC. No se ignoraron — quedaron absorbidas dentro de κ_e.

Inciso e) — Diferencia de potencial V' con la lámina

Con la lámina insertada el campo es distinto en cada región, por lo que dividimos la integral:

$$V' = \int_0^d E\,ds = \underbrace{E_0\,(d-b)}_{\text{aire}} + \underbrace{E \cdot b}_{\text{dieléctrico}} \tag{9}$$

donde $d - b = (1.24 - 0.78)$ cm $= 0.46$ cm es la longitud total de aire.

$$\boxed{V' = E_0\,(d-b) + E \cdot b}$$

Sustituyendo numéricamente:

$$\begin{aligned} V' &= (6900\ \text{V/m})(0.0046\ \text{m}) + (2640\ \text{V/m})(0.0078\ \text{m}) \\ &= 31.7\ \text{V} + 20.6\ \text{V} = \boxed{52.3\ \text{V}} \end{aligned} \tag{10}$$

El voltaje bajó de 85.5 V a 52.3 V porque el campo reducido dentro del dieléctrico contribuye menos a la integral. Esto anticipa que $C' = q/V'$ será mayor que C_0.

Inciso f) — Capacitancia C' con la lámina

Cálculo directo

Aplicando la definición $C \equiv q/V$ con los nuevos valores:

$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{702 \times 10^{-12}\ \mathrm{C}}{52.3\ \mathrm{V}} = \boxed{13.4\ \mathrm{pF}} \tag{11}$$

Fórmula analítica general

Sustituyendo $V' = E_0(d-b) + Eb$, con $E_0 = q/(\varepsilon_0 A)$ y $E = q/(\kappa_e \varepsilon_0 A)$:

$$C' = \frac{\varepsilon_0\, A}{(d-b) + \dfrac{b}{\kappa_e}} \tag{12}$$

> Interpretación: equivale a dos capacitores en serie — uno de aire (separación $d-b$) y uno de dieléctrico (separación efectiva b/κ_e). Como $b/\kappa_e < b$, la separación efectiva es menor que d y por eso $C' > C_0$.

Cadena causal completa

¿Por qué aumentó C?

1. Batería desconectada $\Rightarrow$ q constante.
2. Lámina insertada $\Rightarrow$ moléculas polarizadas $\Rightarrow$ E se reduce en el dieléctrico.
3. E reducido $\Rightarrow$ $V' = \int E\, ds$ disminuye de 85.5 V a 52.3 V.
4. q constante + V' menor $\Rightarrow$ $C' = q/V'$ sube de 8.21 a 13.4 pF.

Tabla resumen completa

Cantidad	**Unidad**	**Sin lámina**	**Lámina parcial**	**Lámina completa**
C	pF	8.21	13.4	21.4
q	pC	702	702	702
q'	pC	—	433	433
V	V	85.5	52.3	32.8
E_0	kV/m	6.90	6.90	6.90
E	kV/m	—	2.64	2.64

Inciso	**Herramienta principal**	**Resultado**
a)	Ley de Gauss + $\vec{E} = -\nabla\phi$	$C_0 = \varepsilon_0 A/d = 8.21$ pF
b)	Definición $C \equiv q/V$	$q = 702$ pC (constante)
c)	Ley de Gauss (sup. en $+q$, $\kappa_e = 1$)	$E_0 = 6.90$ kV/m
d)	Ley de Gauss (sup. en $-q$, $\kappa_e = 2.61$)	$E = 2.64$ kV/m
e)	$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$ en dos regiones	$V' = 52.3$ V
f)	Definición $C \equiv q/V$	$C' = 13.4$ pF