Problema 30-9 — Capacitor con dieléctrico parcial

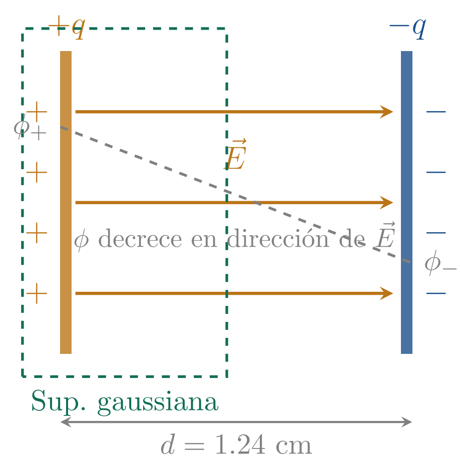
Inciso a) — Derivación de C_0 desde primeros principios

Halliday, Resnick y Krane · Física Vol. 2

Datos del problema

Cantidad	**Valor**	**En unidades SI**
Área de las placas A	115 cm^2	$115 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Separación d	1.24 cm	1.24×10^{-2} m
Constante dieléctrica κ_e	2.61	—
Voltaje inicial V_0	85.5 V	—

Configuración del capacitor



Paso 1 — Campo eléctrico entre las placas (Ley de Gauss)

Construimos una superficie gaussiana rectangular que encierra únicamente la placa positiva con carga libre q. El campo eléctrico dentro del conductor es cero, por lo que el flujo solo contribuye en la cara interior:

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q \tag{1}$$

Como el campo es uniforme y perpendicular a las placas, la integral se reduce a:

$$\varepsilon_0 \, E \, A = q \tag{2}$$

$$\boxed{E = \frac{q}{\varepsilon_0\, A}}$$

Nota: Usamos $\kappa_e = 1$ porque en este inciso aún no hay dieléctrico. El campo solo depende de la carga libre q y la geometría — no del voltaje.

Paso 2 — Diferencia de potencial y el signo de $\vec{E} = -\nabla\phi$

La relación fundamental entre campo eléctrico y potencial es:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \qquad \Longrightarrow \qquad E = -\frac{d\phi}{ds} \tag{3}$$

El signo negativo expresa que el campo apunta en la dirección en que el potencial *decrece* — igual que una pelota rueda cuesta abajo. Integramos desde la placa positiva ($s = 0$) hasta la negativa ($s = d$), en la dirección de $\vec{E}$:

$$V = \phi_+ - \phi_- = -\int_0^d \frac{d\phi}{ds}\, ds \tag{4}$$

Como $E = -d\phi/ds$, entonces $d\phi/ds = -E$. Sustituyendo:

$$V = -\int_0^d (-E)\, ds = \int_0^d E\, ds = E \cdot d \tag{5}$$

¿Por qué no hay signo negativo en el resultado? El signo negativo aparece **dos veces** y se cancela: una vez en $E = -d\phi/ds$ y otra al sustituir. El resultado $V > 0$ es correcto: la placa positiva siempre está a mayor potencial que la negativa.

Sustituyendo E del Paso 1:

$$V = E \cdot d = \frac{q}{\varepsilon_0 A} \cdot d \tag{6}$$

$$\boxed{V = \frac{q\, d}{\varepsilon_0\, A}}$$

Paso 3 — Definición de capacitancia

La capacitancia se define como la razón entre la carga almacenada y la diferencia de potencial entre las placas:

$$C \equiv \frac{q}{V} \tag{7}$$

Sustituyendo V del Paso 2:

$$C = \frac{q}{\frac{qd}{\varepsilon_0 A}} = \frac{\varepsilon_0 \, A}{d} \tag{8}$$

> Las q se cancelan. Esto es fundamental: la capacitancia **no depende** de la carga ni del voltaje aplicado — solo de la geometría (A, d) y del material entre las placas.

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \, A}{d}}$$

Paso 4 — Sustitución numérica

$$\begin{aligned} C_0 = \frac{\varepsilon_0 \, A}{d} &= \frac{(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m})(115 \times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2)}{1.24 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}} \\ &= 8.21 \times 10^{-12}\ \mathrm{F} \end{aligned} \tag{9}$$

$$C_0 = 8.21\ \mathbf{pF}$$

Resumen de la derivación

Paso	Herramienta	Resultado
1	Ley de Gauss	$E = q/(\varepsilon_0 A)$
2	$\vec{E} = -\nabla\phi \ + \ \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$	$V = qd/(\varepsilon_0 A)$
3	Definición $C \equiv q/V$	$C = \varepsilon_0 A/d$
4	Datos numéricos	$C_0 = 8.21$ pF