Problema 30-9 — Capacitor con dieléctrico parcial

Inciso d) — Campo eléctrico E dentro del dieléctrico

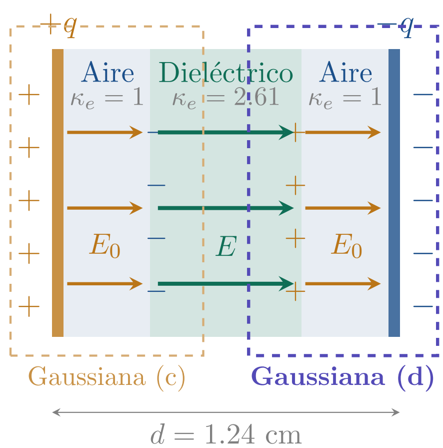
Halliday, Resnick y Krane · Física Vol. 2

Resultados de los incisos anteriores

$$C_0 = 8.21 \text{ pF} \qquad q = 702 \text{ pC} \quad \text{(constante)} \qquad E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A} = 6.90 \text{ kV/m}$$

Idea central: dos superficies gaussianas, un mismo campo

En el inciso c) usamos una superficie gaussiana que encerraba la placa **positiva** $(+q)$. Ahora aplicamos la misma Ley de Gauss pero con una superficie que encierra la placa **negativa** $(-q)$. Esto nos forzará a evaluar la integral en una cara que queda *dentro* del dieléctrico, donde $\kappa_e \neq 1$.



Derivación de E con la Ley de Gauss

Paso 1 — Aplicar la Ley de Gauss a la placa negativa

La superficie gaussiana (d) encierra únicamente la placa negativa con carga libre $-q$. La Ley de Gauss con dieléctrico queda:

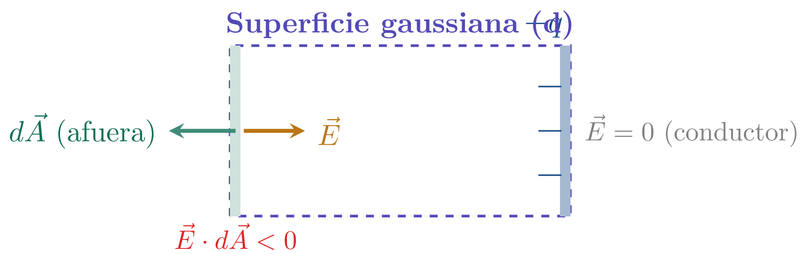
$$\varepsilon_0 \oint \kappa_e \vec{E} \cdot d\vec{A} = -q \tag{1}$$

Paso 2 — Analizar el signo del producto $\vec{E} \cdot d\vec{A}$

Aquí está la sutileza del signo. El vector $d\vec{A}$ siempre apunta hacia *afuera* de la superficie gaussiana cerrada. En la cara izquierda de la gaussiana (d), que se encuentra dentro del dieléctrico:

- $\vec{E}$ apunta hacia la derecha (de $+q$ a $-q$).
- $d\vec{A}$ apunta hacia la **izquierda** (hacia afuera de la gaussiana).

Por lo tanto $\vec{E} \cdot d\vec{A} < 0$, y la integral resulta $-E\,A$. Esto es consistente con que la carga encerrada es $-q$.



Evaluando la integral (solo la cara izquierda contribuye, con $\kappa_e = 2.61$):

$$\varepsilon_0\,\kappa_e\,(-E)\,A = -q \tag{2}$$

Los signos negativos se cancelan:

$$\varepsilon_0\,\kappa_e\,E\,A = q \tag{3}$$

Despejando E:

$$E = \frac{q}{\kappa_e\,\varepsilon_0\,A} = \frac{E_0}{\kappa_e} \tag{4}$$

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{q}{\kappa_e\,\varepsilon_0\,A}}$$

Interpretación física: el dieléctrico se polariza y genera cargas superficiales inducidas q' que crean un campo E' opuesto a E_0. El campo neto dentro del dieléctrico es $E = E_0 - E'$, que resulta reducido por el factor κ_e. El factor κ_e en la Ley de Gauss ya contabiliza implícitamente estas cargas inducidas.

Paso 3 — Sustitución numérica

$$\begin{aligned} E &= \frac{E_0}{\kappa_e} = \frac{6.90 \text{ kV/m}}{2.61} \\ &= \frac{q}{\kappa_e\, \varepsilon_0\, A} = \frac{7.02 \times 10^{-10} \text{ C}}{2.61\,(8.85 \times 10^{-12})(115 \times 10^{-4})} \text{ V/m} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\boxed{E = 2640 \ \mathbf{V/m} = 2.64 \ \mathbf{kV/m}}$$

Resumen acumulado

Cantidad	**Sin lámina**	**Lámina parcial**	**Herramienta**
C	8.21 pF	cambia	$C = \varepsilon_0 A/d$
q	702 pC	702 pC	$q = C_0 V_0$
E_0	6.90 kV/m	6.90 kV/m	Ley de Gauss (sup. $+q$)
E	—	2.64 kV/m	Ley de Gauss (sup. $-q$)
V	85.5 V	por calcular (inc. e)	$\int E\, ds$