

Problema 30-9 — Capacitor con dieléctrico parcial

Inciso e) — Diferencia de potencial V' con la lámina

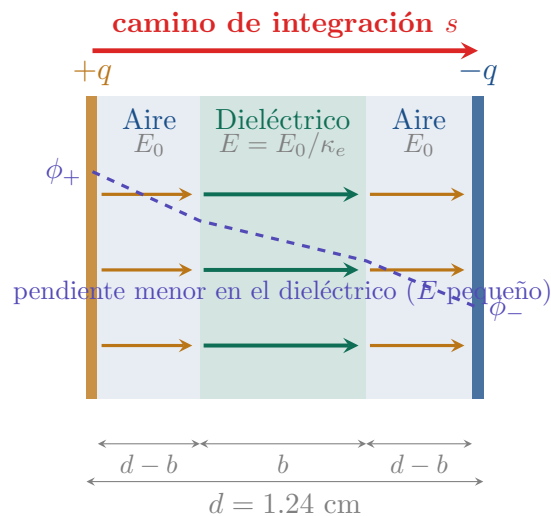
Halliday, Resnick y Krane · Física Vol. 2

Resultados de los incisos anteriores

$$q = 702 \text{ pC} \quad (\text{constante}) \quad E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A} = 6.90 \text{ kV/m} \quad E = \frac{E_0}{\kappa_e} = 2.64 \text{ kV/m}$$

Idea central: integrar \vec{E} a lo largo de dos regiones

Con la lámina insertada, el camino de integración entre las placas ya no es homogéneo — atraviesa **dos regiones** con campos distintos. Debemos integrar por separado en cada una.



Derivación de V' usando $V = \phi_+ - \phi_- = \int_0^d E ds$

Paso 1 — Recordar la relación $V = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$

Del inciso a) ya derivamos que, en la dirección del campo:

$$V = \phi_+ - \phi_- = - \int_0^d \frac{d\phi}{ds} ds = \int_0^d E ds \quad (1)$$

Con un solo campo uniforme eso daba $V = E \cdot d$. Ahora el campo cambia en distintas regiones, por lo que dividimos la integral:

$$V' = \int_{\text{aire izq.}} E_0 ds + \int_{\text{diel.}} E ds + \int_{\text{aire der.}} E_0 ds \quad (2)$$

Paso 2 — Identificar los límites de integración

Región	Campo	Longitud
Aire izquierdo	$E_0 = 6.90 \text{ kV/m}$	$d - b$
Dieléctrico	$E = 2.64 \text{ kV/m}$	b
Aire derecho	$E_0 = 6.90 \text{ kV/m}$	$d - b$

Las dos regiones de aire tienen el mismo campo E_0 y la misma longitud $d - b$, por lo que sus contribuciones se pueden sumar: $2 E_0 (d - b)$. El libro las trata juntas como $E_0(d - b)$ considerando solo la región a un lado — ambos enfoques son equivalentes si se es consistente con la geometría.

Paso 3 — Evaluar la integral en cada región

Como E_0 y E son constantes dentro de cada región:

$$V' = E_0 (d - b) + E \cdot b + E_0 (d - b) \quad (3)$$

Agrupando las dos regiones de aire (ver nota arriba):

$$V' = E_0 (d - b) + E \cdot b \quad (4)$$

donde $d - b = (1.24 - 0.78) \text{ cm} = 0.46 \text{ cm}$ es la longitud **total** de aire entre las placas.

$$V' = E_0 (d - b) + E \cdot b$$

Paso 4 — Sustitución numérica

$$\begin{aligned} V' &= E_0 (d - b) + E \cdot b \\ &= (6900 \text{ V/m})(0.0046 \text{ m}) + (2640 \text{ V/m})(0.0078 \text{ m}) \\ &= 31.7 \text{ V} + 20.6 \text{ V} \end{aligned} \quad (5)$$

$$V' = 52.3 \text{ V}$$

¿Por qué bajó el voltaje de 85.5 V a 52.3 V?

Interpretación física. El voltaje es el trabajo por unidad de carga para llevar una carga de una placa a la otra. Al insertar el dieléctrico:

- En las regiones de aire el campo E_0 no cambió — siguen contribuyendo igual al voltaje.
- Dentro del dieléctrico el campo se redujo a $E = E_0/\kappa_e$ — esta región contribuye *menos* al voltaje que si fuera aire.

El resultado neto es que V' es menor que el voltaje original V_0 , a pesar de que la carga q no cambió. Esto anticipa que la capacitancia $C' = q/V'$ será mayor que C_0 .

Resumen acumulado

Cantidad	Sin lámina	Lámina parcial	Herramienta
C	8.21 pF	por calcular (inc. f)	$C = q/V'$
q	702 pC	702 pC	$q = C_0V_0$
E_0	6.90 kV/m	6.90 kV/m	Ley de Gauss
E	—	2.64 kV/m	$E = E_0/\kappa_e$
V	85.5 V	52.3 V	$\int E ds$