

Problema 30-9 — Capacitor con dieléctrico parcial

Inciso f) — Capacitancia C' con la lámina en su posición

Halliday, Resnick y Krane · Física Vol. 2

Resultados de los incisos anteriores

$$q = 702 \text{ pC} \quad (\text{constante}) \quad E_0 = 6.90 \text{ kV/m} \quad E = 2.64 \text{ kV/m} \quad V' = 52.3 \text{ V}$$

Derivación de C' a partir de la definición

Paso 1 — Aplicar la definición de capacitancia

La capacitancia es siempre, por definición:

$$C \equiv \frac{q}{V} \quad (1)$$

Ahora q no cambió (batería desconectada), pero V' sí bajó al insertar la lámina. Sustituyendo directamente:

$$C' = \frac{q}{V'} = \frac{702 \times 10^{-12} \text{ C}}{52.3 \text{ V}} \quad (2)$$

$$C' = 13.4 \text{ pF}$$

Paso 2 — Fórmula general para C'

Podemos obtener una expresión analítica sustituyendo $V' = E_0(d - b) + Eb$ y $E_0 = q/(\epsilon_0 A)$, $E = q/(\kappa_e \epsilon_0 A)$:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{q}{V'} = \frac{q}{E_0(d - b) + E \cdot b} \\ &= \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 A}(d - b) + \frac{q}{\kappa_e \epsilon_0 A} b} \end{aligned} \quad (3)$$

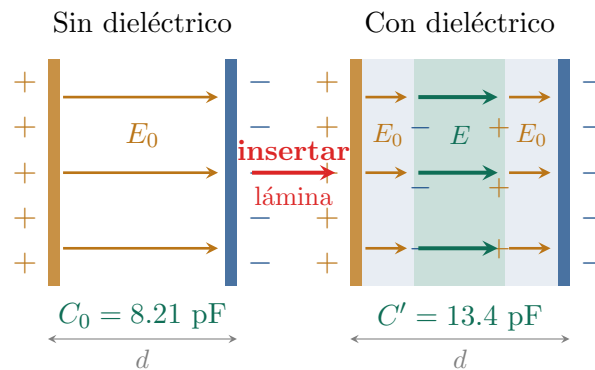
Factorizando $q/(\epsilon_0 A)$:

$$C' = \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 A} \left[(d-b) + \frac{b}{\kappa_e} \right]} = \frac{\epsilon_0 A}{(d-b) + \frac{b}{\kappa_e}} \quad (4)$$

$$C' = \frac{\epsilon_0 A}{(d-b) + \frac{b}{\kappa_e}}$$

Esta expresión tiene una interpretación elegante: el capacitor con dieléctrico parcial es **equivalente a dos capacitores en serie** — uno de aire con separación $(d-b)$ y otro de dieléctrico con separación b/κ_e efectiva. Como $b/\kappa_e < b$, la separación efectiva total es menor que d , y por eso $C' > C_0$.

Comparación visual: C_0 vs C'



¿Por qué aumentó la capacitancia?

La cadena causal completa:

1. La batería se desconecta $\Rightarrow q$ queda constante.
2. Se inserta el dieléctrico \Rightarrow las moléculas se polarizan $\Rightarrow E$ se reduce dentro del dieléctrico.
3. E reducido \Rightarrow la integral $V' = \int E ds$ da un valor menor $\Rightarrow V'$ baja de 85.5 V a 52.3 V.
4. q constante + V' menor $\Rightarrow C' = q/V'$ sube de 8.21 pF a 13.4 pF.

Tabla resumen completa del problema

| Cantidad | Unidad | Sin lámina | Lámina parcial | Lámina completa |
|----------|--------|------------|----------------|-----------------|
| C | pF | 8.21 | 13.4 | 21.4 |
| q | pC | 702 | 702 | 702 |
| q' | pC | — | 433 | 433 |
| V | V | 85.5 | 52.3 | 32.8 |
| E_0 | kV/m | 6.90 | 6.90 | 6.90 |
| E | kV/m | — | 2.64 | 2.64 |

Herramientas utilizadas en cada inciso: (a) Ley de Gauss $\rightarrow E = q/(\epsilon_0 A)$, definición $C \equiv q/V \rightarrow C = \epsilon_0 A/d$. (b) $C \equiv q/V$ despejando q . (c)–(d) Ley de Gauss con κ_e en superficies distintas. (e) $\vec{E} = -\nabla\phi$, integración en dos regiones. (f) Definición $C \equiv q/V$ con el nuevo voltaje V' .