

# Electrostática en Medios Materiales

## Del potencial de Coulomb al vector $\mathbf{D}$

Notas de Clase — Electrodinámica Clásica

Licenciatura en Física, curso avanzado

March 9, 2026

### El potencial que ya conocemos

Hasta ahora hemos trabajado con el potencial electrostático de una distribución de cargas en el vacío. La expresión que conocemos es:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (1)$$

Esta fórmula es *exacta*: dado el perfil de carga  $\rho(\mathbf{x}')$ , determina el potencial en cualquier punto  $\mathbf{x}$ .

Ahora queremos aplicarla a un medio material — un dieléctrico, por ejemplo. El problema es inmediato: en un trozo de materia ordinario hay del orden de  $10^{23}$  cargas por mol, todas en movimiento térmico y distribuidas de manera complicada a escala atómica. La densidad de carga  $\rho(\mathbf{x}')$  fluctúa violentamente de un punto a otro, y resolver la integral (1) con ese nivel de detalle es completamente imposible en la práctica.

**Cambio de perspectiva.** En el vacío, la ecuación (1) describe la situación completa. En un medio material, esa misma ecuación sigue siendo *exacta* — pero ahora  $\rho(\mathbf{x}')$  incluye las cargas de *todas* las moléculas del medio. A esta cantidad la llamaremos a partir de ahora  $\rho_{\text{micro}}(\mathbf{x}')$ , y al potencial resultante  $\Phi_{\text{micro}}(\mathbf{x})$ , para subrayar que son cantidades que fluctúan a escala atómica y que no corresponden a nada directamente medible:

$$\Phi_{\text{micro}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{micro}}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'. \quad (2)$$

El potencial que hemos estudiado hasta ahora *es* este potencial microscópico — simplemente no necesitábamos ese nombre cuando no había distinción que hacer. Lo que necesitamos ahora es construir, a partir de (2), un potencial macroscópico que varíe suavemente y sea físicamente relevante.

La estrategia para lograrlo no será integrar (2) de golpe sobre todas las cargas, sino aprovechar la estructura molecular de la materia: agruparemos las cargas *molécula por molécula*, aplicaremos la expansión multipolar a cada una, y luego sumaremos.

## La contribución de una sola molécula

Consideremos una sola molécula  $j$ , con centro de masa en  $\mathbf{x}_j$ . Las cargas de esta molécula tienen posiciones absolutas  $\mathbf{r}$  medidas desde el origen  $O$ . Escribimos:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_j + \mathbf{s}, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{x}_j$  es la **coordenada interna** de la molécula — el desplazamiento de la carga respecto al centro de masa. Dado que las moléculas son pequeñas,  $|\mathbf{s}| \sim a_0 \sim 10^{-10}$  m. La Figura 1 ilustra esta geometría.

Notación:  $\mathbf{r}$  = posición absoluta desde  $O$ ,  $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{x}_j$  = coordenada interna de la molécula

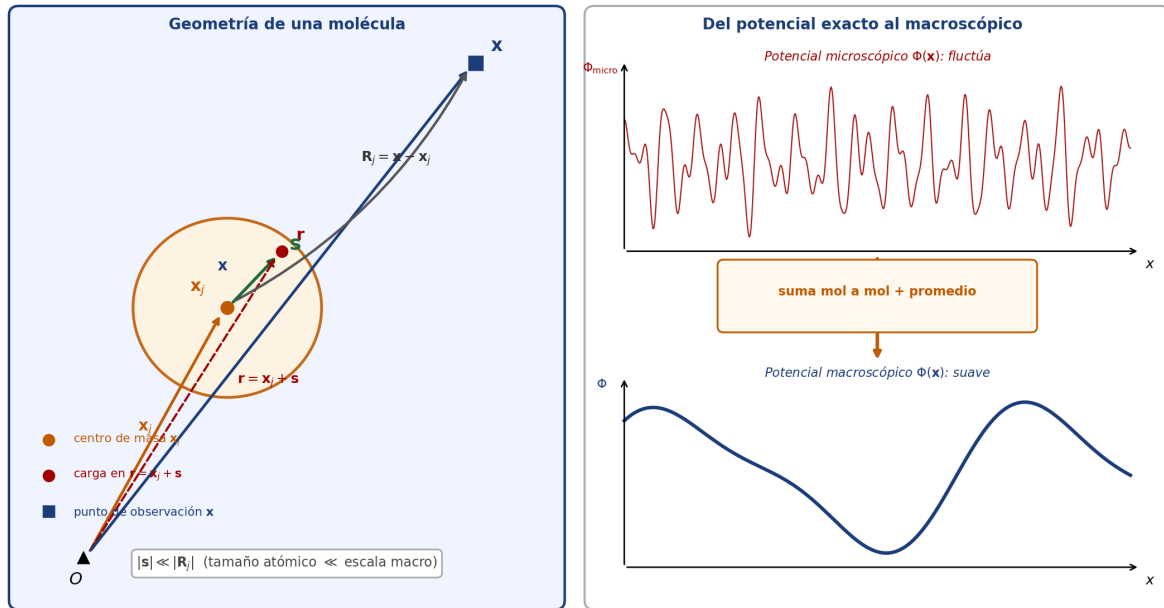


Figure 1: **Izquierda:** geometría del problema. Las posiciones se miden desde el origen  $O$ . La carga en la molécula  $j$  tiene posición absoluta  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_j + \mathbf{s}$ , donde  $\mathbf{s}$  es la coordenada interna respecto al centro de masa  $\mathbf{x}_j$ . La separación macroscópica al punto de observación es  $\mathbf{R}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}_j$ , con  $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{R}_j|$ . **Derecha:** el procedimiento mol a mol convierte el potencial microscópico (fluctuante) en el potencial macroscópico (suave).

El potencial en  $\mathbf{x}$  debido *únicamente* a esta molécula es exactamente:

$$\Delta\Phi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{mol}_j} \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{x} - \mathbf{r}|} d^3r, \quad (4)$$

donde  $\rho(\mathbf{r})$  es la densidad de carga microscópica total evaluada en la posición absoluta  $\mathbf{r}$ , y la integral corre sobre el volumen que ocupa la molécula  $j$ .

Sustituimos  $\mathbf{r} = \mathbf{x}_j + \mathbf{s}$  y definimos  $\mathbf{R}_j = \mathbf{x} - \mathbf{x}_j$ , la separación macroscópica entre el punto de observación y el centro de la molécula:

$$\Delta\Phi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{mol}_j} \frac{\rho(\mathbf{x}_j + \mathbf{s})}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{s}|} d^3s. \quad (5)$$

La condición  $|\mathbf{s}| \ll |\mathbf{R}_j|$  justifica expandir el denominador:

$$\frac{1}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{s}|} = \frac{1}{R_j} + \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{R}_j}{R_j^3} + \mathcal{O}\left(\frac{s^2}{R_j^2}\right). \quad (6)$$

Sustituyendo en (5) y reteniendo solo los dos primeros términos:

$$\Delta\Phi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{e_j}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \frac{\mathbf{p}_j \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} + \dots \right], \quad (7)$$

donde la **carga total** y el **momento dipolar** de la molécula  $j$  son:

$$e_j = \int_{\text{mol}_j} \rho(\mathbf{x}_j + \mathbf{s}) d^3s, \quad \mathbf{p}_j = \int_{\text{mol}_j} \mathbf{s} \rho(\mathbf{x}_j + \mathbf{s}) d^3s. \quad (8)$$

Estas son exactamente las definiciones estándar de los momentos moleculares, escritas ahora en términos de la coordenada interna  $\mathbf{s}$  y la densidad de carga evaluada en posición absoluta  $\mathbf{x}_j + \mathbf{s}$ .

**¿Por qué solo dipolo?** El término cuadrupolar siguiente es de orden  $(\xi/R_j)^2 \sim (a_0/L)^2 \ll 1$ , donde  $a_0 \sim 10^{-10}$  m es el tamaño atómico y  $L$  es la escala macroscópica. A distancias macroscópicas, la contribución cuadrupolar es completamente negligible frente a la dipolar.

## Promediando sobre una molécula

La ecuación (7) contiene  $e_j$  y  $\mathbf{p}_j$ , que son propiedades de la molécula  $j$  en un instante particular. En la práctica, las moléculas están en agitación térmica constante: sus nubes electrónicas vibran, rotan y se distorsionan bajo la influencia del campo externo.

Lo que tiene sentido físico no son los valores instantáneos  $e_j$  y  $\mathbf{p}_j$ , sino sus **promedios estadísticos**:

$$\langle e \rangle \equiv \langle e_j \rangle, \quad \langle \mathbf{p} \rangle \equiv \langle \mathbf{p}_j \rangle. \quad (9)$$

La contribución promediada de la molécula  $j$  al potencial es entonces:

$$\langle \Delta\Phi_j(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\langle e \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \frac{\langle \mathbf{p} \rangle \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \right]. \quad (10)$$

### ¿Qué valores toman $\langle e \rangle$ y $\langle \mathbf{p} \rangle$ ?

- **Carga total  $\langle e \rangle$** : la mayoría de las moléculas son eléctricamente neutras, así que  $\langle e \rangle = 0$  para moléculas neutras. Si hay iones o exceso de carga libre,  $\langle e \rangle \neq 0$ .
- **Momento dipolar  $\langle \mathbf{p} \rangle$** : en ausencia de campo externo, los dipolos se orientan aleatoriamente y  $\langle \mathbf{p} \rangle = 0$ . En presencia de un campo externo, las nubes electrónicas se distorsionan (o los dipolos permanentes se alinean parcialmente), dando  $\langle \mathbf{p} \rangle \neq 0$ . Este es el fenómeno de la **polarización dieléctrica**.

## Sumando sobre todas las moléculas

El potencial macroscópico total es la suma de las contribuciones de *todas* las moléculas del medio:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_j \langle \Delta\Phi_j(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_j \left[ \frac{\langle e \rangle}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|} + \frac{\langle \mathbf{p} \rangle \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^3} \right]. \quad (11)$$

Para pasar de esta suma discreta a una integral continua, introducimos:

- $n(\mathbf{x}')$ : el número de moléculas por unidad de volumen en  $\mathbf{x}'$ .
- $\rho(\mathbf{x}') \equiv n(\mathbf{x}')\langle e \rangle$ : la **densidad de carga libre macroscópica**.
- $\mathbf{P}(\mathbf{x}') \equiv n(\mathbf{x}')\langle \mathbf{p} \rangle$ : la **polarización** — momento dipolar por unidad de volumen.

La Figura 2 ilustra este paso.

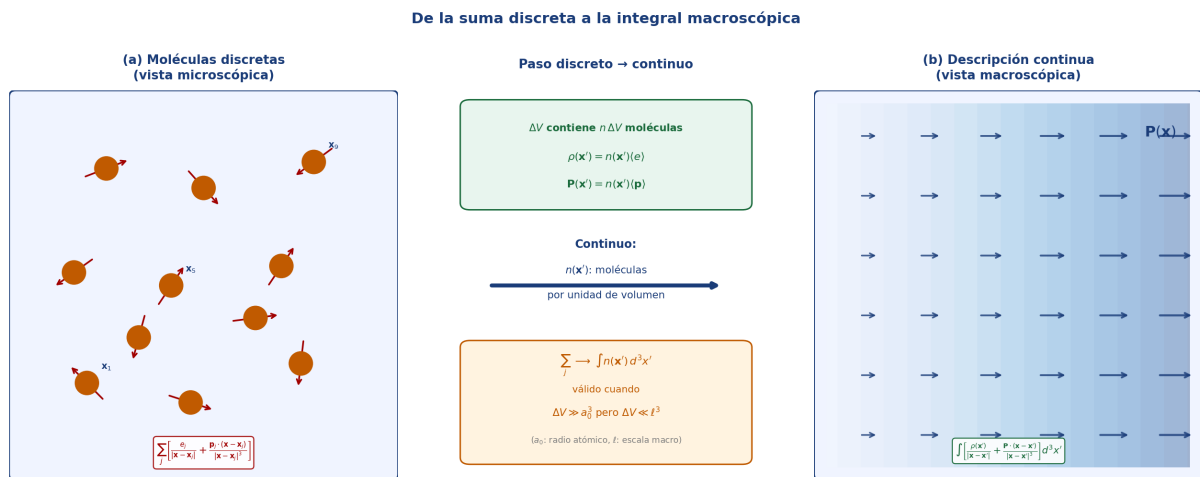


Figure 2: **(a)** Vista microscópica: moléculas discretas en posiciones  $\mathbf{x}_j$ , cada una con su dipolo orientado al azar (antes del campo externo). **Centro:** el paso al continuo introduce  $n(\mathbf{x}')$ , la densidad molecular, y reemplaza la suma discreta por una integral. Un volumen  $\Delta V$  contiene  $n \Delta V$  moléculas, y sus momentos promedio definen  $\rho$  y  $\mathbf{P}$ . **(b)** Vista macroscópica: el medio queda descrito por campos suaves  $\rho(\mathbf{x}')$  y  $\mathbf{P}(\mathbf{x}')$ .

La suma (11) se convierte en:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \left[ \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right]. \quad (12)$$

**Comparación con el punto de partida.** La ecuación (12) tiene exactamente la misma estructura que la fórmula de Coulomb (1) con la que comenzamos — pero ahora hay *dos* términos fuente: uno debido a las cargas libres  $\rho$ , y otro nuevo, debido a los dipolos moleculares a través de  $\mathbf{P}$ . Este segundo término es la huella de la materia polarizada en el potencial.

## Transformando el término dipolar

El segundo término en (12) puede reescribirse de una forma más reveladora. Usando la identidad vectorial:

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right), \quad (13)$$

el integrando dipolar se convierte en:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\mathbf{P}(\mathbf{x}') \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (14)$$

Aplicamos la identidad de producto  $\nabla' \cdot (f \mathbf{A}) = f \nabla' \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \nabla' f$  con  $f = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  y  $\mathbf{A} = \mathbf{P}(\mathbf{x}')$ :

$$-\mathbf{P} \cdot \nabla' \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right). \quad (15)$$

Al integrar sobre todo el espacio, el segundo término es una divergencia total:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla' \cdot \left( \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) d^3 x' = \oint_{S_\infty} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot d\mathbf{a}', \quad (16)$$

donde hemos aplicado el teorema de Gauss, convirtiendo la integral de volumen en una integral de superficie sobre una esfera  $S_\infty$  de radio  $R \rightarrow \infty$ .

Esta integral de superficie es cero por dos razones simultáneas:

- El dieléctrico ocupa una región *finita* del espacio, así que  $\mathbf{P}(\mathbf{x}') = 0$  para  $|\mathbf{x}'|$  suficientemente grande. En la superficie  $S_\infty$ , el integrando es idénticamente cero.
- Incluso si  $\mathbf{P}$  decayera suavemente, el denominador  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \sim R \rightarrow \infty$  haría que el integrando fuera  $\sim P(R)/R$ , y el área de la esfera crece como  $R^2$ . Basta con que  $P(R)$  decaiga más rápido que  $1/R^2$  para que la integral sea cero.

Por lo tanto el segundo término no contribuye, y el potencial macroscópico queda:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 x' \frac{\rho(\mathbf{x}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (17)$$

Esta ecuación tiene una estructura hermosa: el potencial macroscópico tiene la forma de Coulomb (1) con la que comenzamos, pero ahora la fuente es la densidad efectiva  $\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$ .

**¿Qué significa  $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ ?** Si la polarización es uniforme en el espacio, los dipolos de moléculas vecinas se cancelan entre sí y no hay carga neta. Pero si  $\mathbf{P}$  varía de punto a punto, la cancelación es incompleta y aparece una densidad de carga neta. Esta es la **densidad de carga ligada**:

$$\rho_b \equiv -\nabla \cdot \mathbf{P}. \quad (18)$$

Se llama “ligada” porque no es carga libre que podamos mover — es el resultado neto de la polarización de las nubes electrónicas moleculares.

La Figura 3 ilustra el origen físico de esta carga.

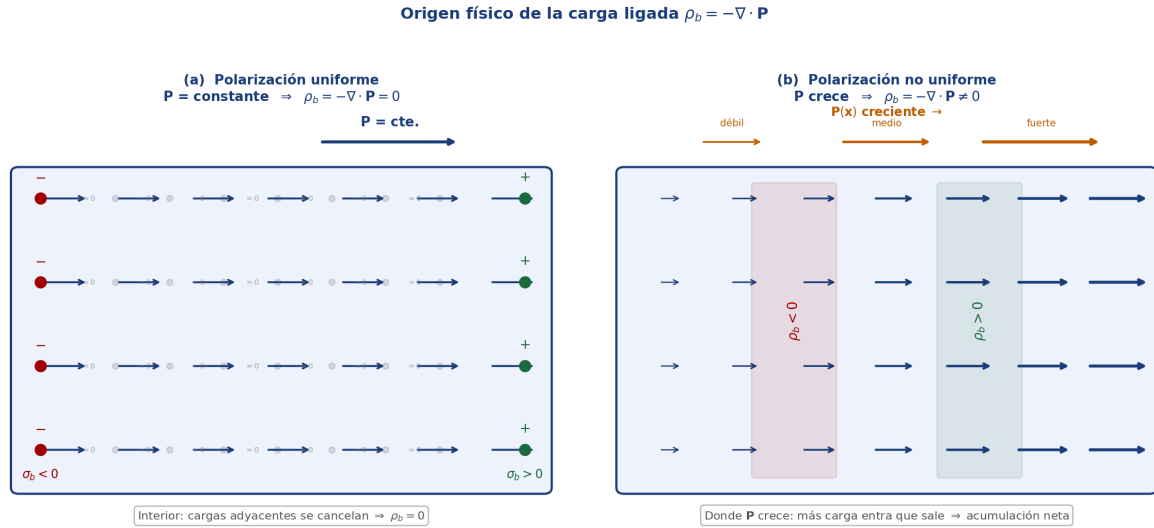


Figure 3: (a) Cuando  $\mathbf{P}$  es uniforme, cada dipolo que “sale” de un volumen es compensado por otro que “entra” desde el vecino. La cancelación es perfecta en el interior:  $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ . Solo en las superficies del material aparece carga ligada superficial  $\sigma_b$ . (b) Cuando  $\mathbf{P}$  crece en el espacio, los dipolos que entran a un pequeño volumen son más grandes que los que salen. La cancelación es incompleta y aparece una densidad de carga neta  $\rho_b \neq 0$  en el interior.

## Del potencial al campo: aparición de $\mathbf{D}$

Ahora conectamos el potencial macroscópico (17) con el campo eléctrico y con las ecuaciones de Maxwell.

### El campo macroscópico

El campo eléctrico macroscópico se obtiene del potencial de la misma manera que siempre:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \tag{19}$$

Para obtener  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  seguimos tres pasos:

**Paso 1.** La ecuación (17) tiene exactamente la forma del potencial de Coulomb (1) con el que comenzamos, pero con una densidad de carga efectiva:

$$\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x}') \equiv \rho(\mathbf{x}') - \nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}'). \tag{20}$$

**Paso 2.** Todo potencial de la forma  $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{eff}}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d^3x'$  satisface la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\rho_{\text{eff}}(\mathbf{x})}{\epsilon_0} = -\frac{\rho(\mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \tag{21}$$

Esto es lo mismo que aprendimos en el capítulo 1 — la ecuación de Poisson es válida para cualquier distribución de carga, y  $\rho_{\text{eff}}$  juega exactamente ese papel aquí.

**Paso 3.** Combinando  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  con (21):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\Phi = \frac{\rho_{\text{eff}}}{\epsilon_0}, \quad (22)$$

lo que da:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}. \quad (23)$$

**¿Por qué funciona la ecuación de Poisson aquí?** Porque la ecuación de Poisson no es una propiedad especial del vacío — es una consecuencia matemática de la forma de Coulomb del potencial. Cualquier  $\Phi$  que se pueda escribir como  $\int \rho_{\text{eff}}/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^3x'$  satisface  $\nabla^2\Phi = -\rho_{\text{eff}}/\epsilon_0$ . En nuestro caso,  $\rho_{\text{eff}} = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$  incluye tanto las cargas libres como las ligadas.

La cadena lógica completa desde el inicio hasta aquí es:

$$\underbrace{\Phi_{\text{micro}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho_{\text{micro}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'}_{\text{ec. (2)}} \xrightarrow{\text{multipolar mol a mol}} \underbrace{\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x'}_{\text{ec. (17)}} \xrightarrow{\mathbf{E} = -\nabla\Phi} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}}_{\text{ec. (23)}}$$

### Definición del vector $\mathbf{D}$

La ecuación (23) puede reordenarse:

$$\nabla \cdot (\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho. \quad (24)$$

La combinación  $\epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  es la cantidad cuya divergencia es *solo* la carga libre  $\rho$ . Esto motiva definir el **vector de desplazamiento eléctrico**:

$$\boxed{\mathbf{D}(\mathbf{x}) \equiv \epsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{x}) + \mathbf{P}(\mathbf{x})}, \quad (25)$$

con lo cual la primera ecuación de Maxwell macroscópica es:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho}. \quad (26)$$

Las cargas ligadas  $\rho_b$  han quedado completamente absorbidas en  $\mathbf{D}$ . La ecuación (26) tiene exactamente la forma de la ley de Gauss que conocemos — solo que ahora  $\rho$  denota *únicamente* las cargas libres, y  $\mathbf{D}$  incorpora la respuesta del medio a través de  $\mathbf{P}$ .

### Relación constitutiva

Para cerrar el sistema necesitamos una relación entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$ . Para un medio lineal, isótropo y homogéneo, la polarización inducida es proporcional al campo:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi_e \mathbf{E}, \quad (27)$$

donde  $\chi_e$  es la **susceptibilidad eléctrica**. Sustituyendo:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e)\mathbf{E} = \epsilon\mathbf{E}, \quad (28)$$

con  $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$  la permitividad del medio y  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  la constante dieléctrica. En este caso:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon}, \quad (29)$$

que es formalmente idéntica al vacío con  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ .

## Resumen

El argumento completo puede seguirse en cinco pasos, que van desde lo conocido hasta lo nuevo:

- 1. El potencial de Coulomb es exacto, pero inmanejable en materia.** La fórmula  $\Phi = \int \rho_{\text{micro}}/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| d^3x'/(4\pi\epsilon_0)$  sigue siendo válida, pero  $\rho_{\text{micro}}$  fluctúa a escala atómica y no podemos usarla directamente.
- 2. Agrupamos por molécula y expandimos en multipolos.** Cada molécula  $j$  contribuye al potencial con su carga total  $e_j$  y su momento dipolar  $\mathbf{p}_j$  (ec. 7).
- 3. Promediamos sobre las configuraciones moleculares.** Los valores promedio  $\langle e \rangle$  y  $\langle \mathbf{p} \rangle$  definen las cantidades macroscópicas relevantes.
- 4. Sumamos sobre todas las moléculas.** Obtenemos el potencial macroscópico con dos fuentes: la densidad de carga libre  $\rho = n\langle e \rangle$  y la polarización  $\mathbf{P} = n\langle \mathbf{p} \rangle$ . Una integración por partes revela la carga ligada  $\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P}$  (ec. 17).
- 5. El campo y el vector D.** De  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  y la ecuación de Poisson se obtiene  $\nabla \cdot \mathbf{E} = (\rho + \rho_b)/\epsilon_0$ . La definición  $\mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$  absorbe las cargas ligadas y da  $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$  (ec. 26).

## Referencias

- J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3<sup>a</sup> ed., Wiley (1999), Sección 4.3.
- D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 4<sup>a</sup> ed., Cambridge (2017), Capítulo 4.
- L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon (1960), §9.