# Capacitores con Dieléctricos

*Problemas resueltos con la Ley de Gauss*

---

Electromagnetismo · Dieléctricos y capacitancia

**En pizarrón:** Problemas 1–4 **Tarea:** Problemas 5–8 y variantes 9A–9D

Escanea para acceder a esta serie de problemas en línea

`manza.space/fenomenos-electromagneticos/serie-de-problemas/`

**PIZARRÓN** Problemas que se resolverán en clase. **TAREA** Problemas para resolver en casa.

# La Ley de Gauss en dieléctricos

Guía visual antes de los problemas

---

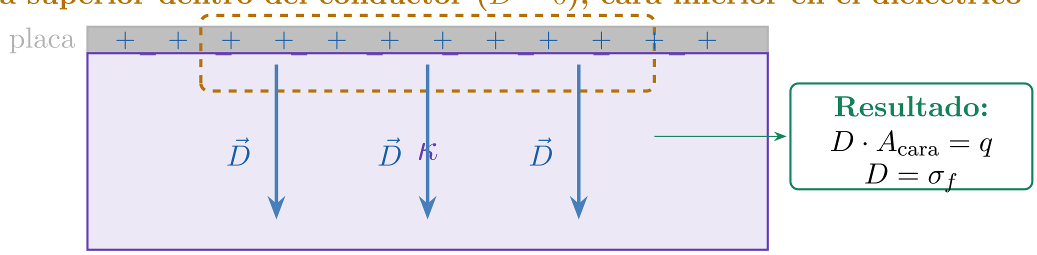
**Ley de Gauss para el campo de desplazamiento $\vec{D}$:**

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{D} \cdot d\vec{A} \;=\; Q_{f,\,\mathrm{enc}} \qquad \text{con} \qquad \vec{D} = \kappa\,\varepsilon_0\,\vec{E}$$

$Q_{f,\,\mathbf{enc}}$ es solo la carga *libre* encerrada por $\mathcal{S}$ — las cargas de polarización (ligadas) no aparecen en el lado derecho.

## 1. La superficie gaussiana tipo *pillbox*

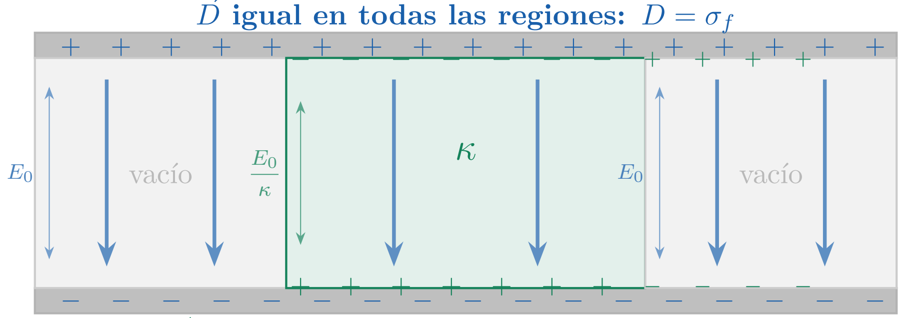
***pillbox*: cara superior dentro del conductor ($D = 0$), cara inferior en el dieléctrico**




La cara superior queda dentro del conductor donde $D = 0$ y no contribuye. Solo contribuye la cara inferior. El resultado $D = \sigma_f$ es **universal**: no depende de $\kappa$, ni de lo que haya más adentro.

## 2. ¿Por qué $\vec{D}$ es continuo pero $\vec{E}$ no?

**$\vec{D}$ igual en todas las regiones: $D = \sigma_f$**




**$\vec{E}$ varía: $E_\kappa = E_0/\kappa$ dentro del dieléctrico**

Las cargas ligadas en las interfaces crean un campo opuesto que *reduce* $E$ dentro del dieléctrico por un factor $\kappa$. La Ley de Gauss con $\vec{D}$ las ignora automáticamente; con $\varepsilon_0\vec{E}$ habría que contarlas explícitamente.

## 3. Receta de 5 pasos

1. **Identificar** las regiones con campo uniforme entre cada par de interfaces.
2. **Pillbox sobre la placa:** $\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = q \;\Rightarrow\; D = \sigma_f$. Esto vale siempre, sin importar la geometría interior.
3. **Pillbox en cada interfaz interna** sin carga libre: $D_\perp$ es continuo $\Rightarrow D_1 = D_2$.
4. **Obtener** $E_i$ en cada región: $E_i = D_i/\kappa_i\varepsilon_0$. Integrar: $V = \sum_i E_i\, d_i$.
5. **Calcular:** $C = Q/V = \sigma_f A/V$. Verificar con casos límite.

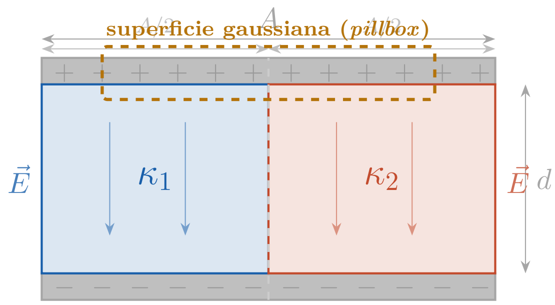
| **Regiones lado a lado** | vs | **Regiones apiladas** |
|---|---|---|
| mismo $V \Rightarrow E_i = V/d_i$ | | $D$ continuo $\Rightarrow D_i = \sigma_f$ |
| **Capacitores en paralelo** | | **Capacitores en serie** |
| suman $C = \sum C_i$ | | suman $1/C = \sum 1/C_i$ |

**PIZARRÓN** Problemas que se resolverán en clase. **TAREA** Problemas para resolver en casa.

---

## PIZARRÓN Problema 1 — Dos dieléctricos en paralelo

Un capacitor de placas paralelas de área $A$ y separación $d$ contiene **dos dieléctricos** $\kappa_1$ y $\kappa_2$ colocados *lado a lado*, cada uno ocupando la mitad del área ($A/2$), como muestra la figura.




Demuestre que:

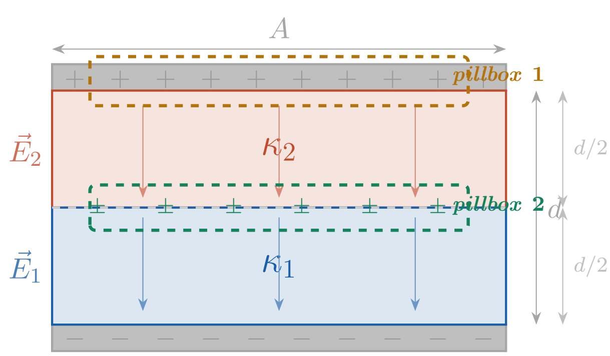
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2)}$$

Compruebe para todos los casos limitantes que pueda imaginar. (*Sugerencia: ¿puede ver este arreglo como dos capacitores en paralelo?*)

---

## PIZARRÓN Problema 2 — Dos dieléctricos en serie

El mismo capacitor ahora tiene los dos dieléctricos *apilados* uno sobre el otro, cada uno de espesor $d/2$.



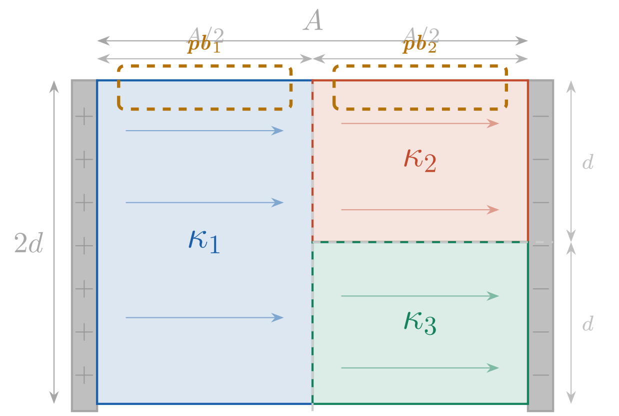

Demuestre que:

$$\boxed{C \;=\; \frac{2\,\varepsilon_0\,A}{d}\cdot\frac{\kappa_1\,\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}}$$

Compruebe para todos los casos limitantes. (*Sugerencia: ¿puede ver este arreglo como dos capacitores en serie?*)

## PIZARRÓN **Problema 3** — Combinación serie-paralelo

Un capacitor de placas de área $A$ está dividido en **tres regiones** de dieléctrico: la mitad izquierda (área $A/2$) con $\kappa_1$ y separación $2d$; el cuarto superior derecho con $\kappa_2$ y separación $d$; el cuarto inferior derecho con $\kappa_3$ y separación $d$.



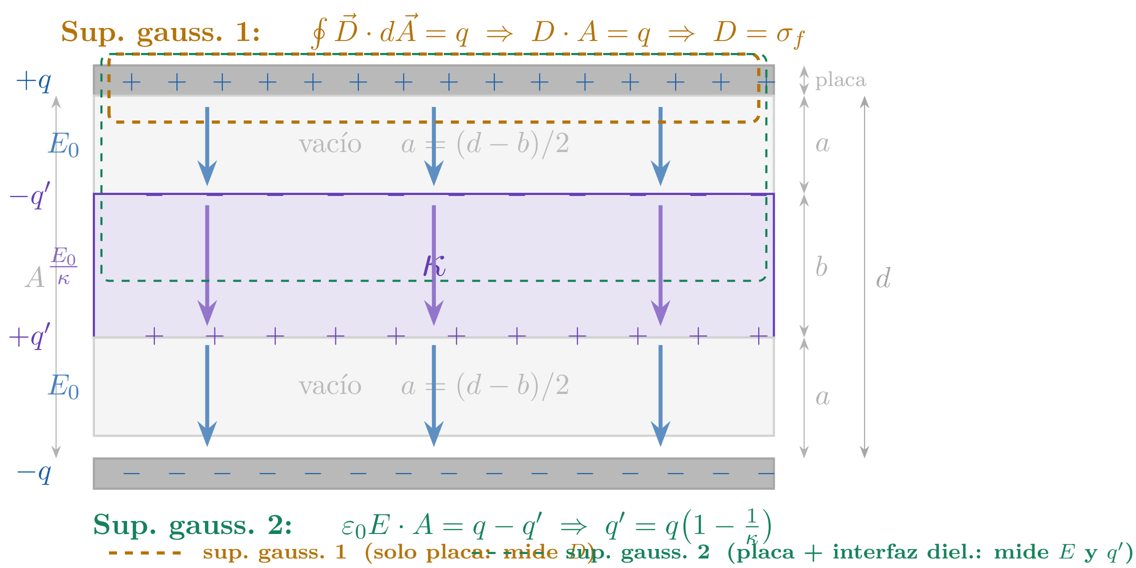

Demuestre que:

$$\boxed{C \;=\; \frac{\varepsilon_0\, A}{4d}(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)}$$

Compruebe para todos los casos limitantes. (*Sugerencia: identifique tres sub-capacitores en paralelo con distinta separación.*)

## PIZARRÓN Problema 4 — Dieléctrico que llena parcialmente el espacio entre placas

Un capacitor de placas paralelas de área $A$ y separación $d$ contiene una lámina de dieléctrico $\kappa$ de espesor $b < d$, flotando **centrada** entre las placas sin tocarlas. Quedan dos regiones de vacío de espesor $a = (d-b)/2$ a cada lado. La figura muestra **dos superficies gaussianas** que revelan la diferencia entre $\vec{D}$ y $\varepsilon_0\vec{E}$.




Demuestre que:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{2a + b/\kappa} = \frac{\varepsilon_0 A}{d - b\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)}$$

**Analice con las dos superficies gaussianas:**

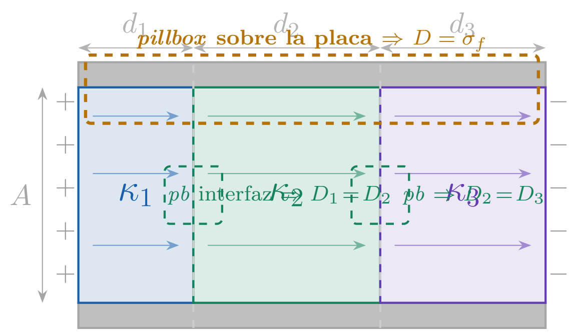
1. **Sup. gaussiana 1** (encierra solo la placa $+q$, cara inferior en el vacío superior): demuestre que $D\cdot A = q$, es decir $D = \sigma_f$ independientemente de $\kappa$.
2. **Sup. gaussiana 2** (encierra la placa más la cara superior del dieléctrico, cara inferior en el dieléctrico): demuestre que $\varepsilon_0 E_\kappa \cdot A = q - q'$, y obtenga $q' = q(1 - 1/\kappa)$. ¿Qué significa físicamente $q'$?
3. Calcule $V = E_0\cdot a + (E_0/\kappa)\cdot b + E_0 \cdot a$ y obtenga $C = q/V$.
4. Verifique los límites: $b = 0$, $b = d$, $\kappa = 1$, $\kappa \to \infty$.

# PROBLEMAS DE TAREA

---

## TAREA Problema 5 — Tres dieléctricos en serie

Un capacitor de placas paralelas (área $A$) está relleno con **tres dieléctricos** $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$ apilados en serie con espesores $d_1$, $d_2$, $d_3$ respectivamente ($d_1 + d_2 + d_3 = d$).




Demuestre que:

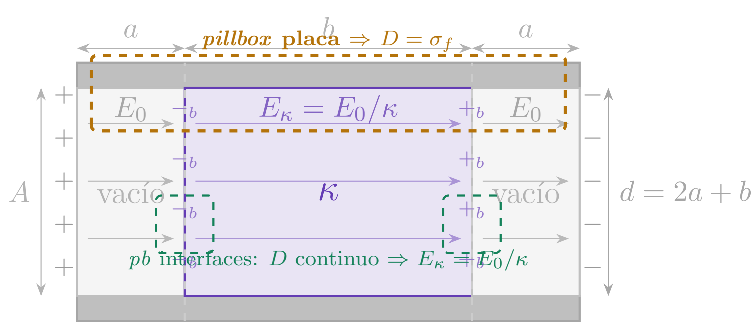
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{d_1}{\kappa_1} + \frac{d_2}{\kappa_2} + \frac{d_3}{\kappa_3}\right)$$

Compruebe para todos los casos limitantes que pueda imaginar.

---

## TAREA Problema 6 — Sandwich vacío–dieléctrico–vacío

Un capacitor de placas paralelas (área $A$) contiene en su interior una **lámina de dieléctrico** $\kappa$ de espesor $b$, centrada simétricamente entre las placas, dejando un espacio de vacío de espesor $a$ a cada lado. La separación total entre placas es $d = 2a + b$.



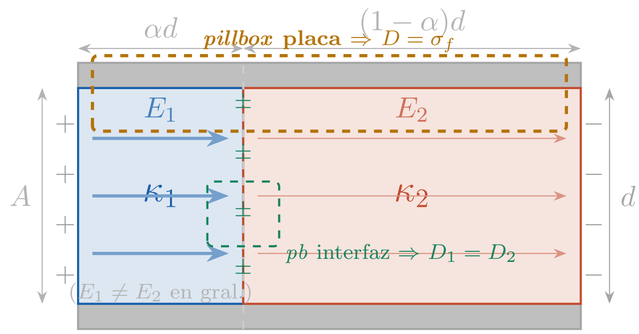

Demuestre que:

$$\frac{1}{C} = \frac{2a + b/\kappa}{\varepsilon_0\, A} \qquad \Longleftrightarrow \qquad C = \frac{\varepsilon_0\, A}{2a + b/\kappa}$$

Analice los límites $\kappa \to 1$, $\kappa \to \infty$, y $a \to 0$.

## TAREA Problema 7 — Serie asimétrico con parámetro $\alpha$

Un capacitor de placas paralelas (área $A$, separación $d$) contiene **dos dieléctricos** $\kappa_1$ y $\kappa_2$ en serie. El dieléctrico $\kappa_1$ ocupa una fracción $\alpha$ de la separación $(0 < \alpha < 1)$, y $\kappa_2$ ocupa el resto $(1-\alpha)d$.




Demuestre que:

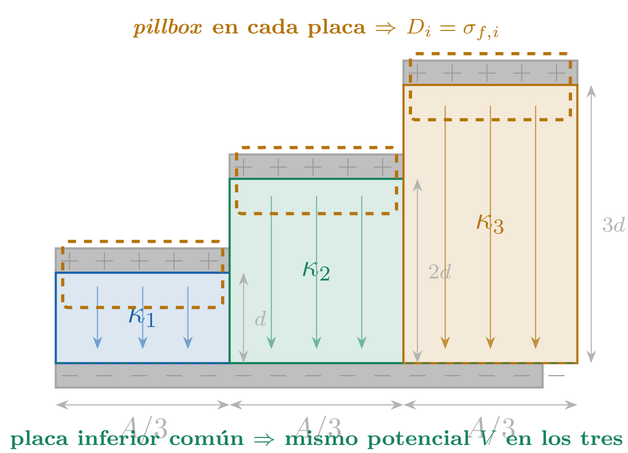
$$C = \frac{\varepsilon_0 A \kappa_1 \kappa_2}{d\left(\alpha \kappa_2 + (1-\alpha)\kappa_1\right)}$$

Verifique que con $\alpha = 1/2$ se recupera el resultado del Problema 2.

---

## TAREA Problema 8 — Tres columnas con separaciones armónicas

Un capacitor de placas de área $A$ está dividido verticalmente en **tres columnas** de dieléctrico, cada una de anchura $A/3$, pero con separaciones entre placas distintas: $d$, $2d$ y $3d$, con dieléctricos $\kappa_1$, $\kappa_2$ y $\kappa_3$ respectivamente.




Demuestre que:

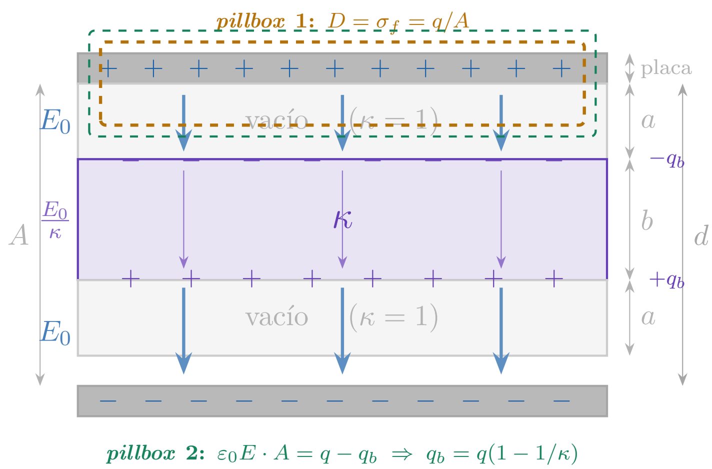
$$C = \frac{\varepsilon_0 \, A}{3d}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\kappa_3}{3}\right)$$

1. Verifique para $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa$.
2. Verifique que cada columna puede verse como un sub-capacitor independiente.
3. ¿Qué sucede en el límite $\kappa_2 \to 0$ y $\kappa_3 \to 0$?

## Tabla resumen de los siete problemas

## PIZARRÓN Problema 8 — Dieléctrico flotante (lámina parcial)

Un capacitor de placas paralelas de área $A$ y separación $d$ contiene una **lámina de dieléctrico** $\kappa$ de espesor $b < d$, centrada simétricamente entre las placas. El dieléctrico no toca las placas: quedan regiones de vacío de espesor $a = (d - b)/2$ a cada lado.




Demuestre que:

$$C \;=\; \frac{\varepsilon_0\, A}{d - b\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)} \;=\; \frac{\varepsilon_0\, A}{2a + b/\kappa}$$

**Analice:**

1. $b = 0$: sin dieléctrico $\Rightarrow C_0 = \varepsilon_0 A/d$.
2. $b = d$: dieléctrico llena todo $\Rightarrow C = \kappa\varepsilon_0 A/d$.
3. $\kappa = 1$: dieléctrico invisible $\Rightarrow C = \varepsilon_0 A/d$.
4. $\kappa \to \infty$: conductor flotante $\Rightarrow C = \varepsilon_0 A/(d - b)$.

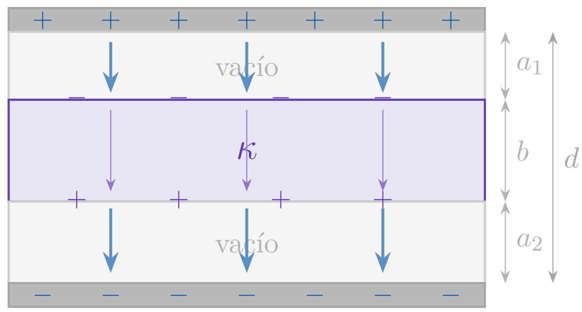
(*Este problema ilustra la diferencia entre dos superficies gaussianas: una encierra solo la carga libre $q$, la otra también la carga ligada $q_b$.*)

# VARIANTES DEL PROBLEMA 8

---

## TAREA Problema 8A — Dieléctrico descentrado

Mismo sistema que el Problema 8, pero la lámina de dieléctrico $\kappa$ de espesor $b$ **no está centrada**: hay vacío de espesor $a_1$ sobre ella y $a_2$ bajo ella, con $a_1 \neq a_2$ (y $a_1 + b + a_2 = d$).




Demuestre que:

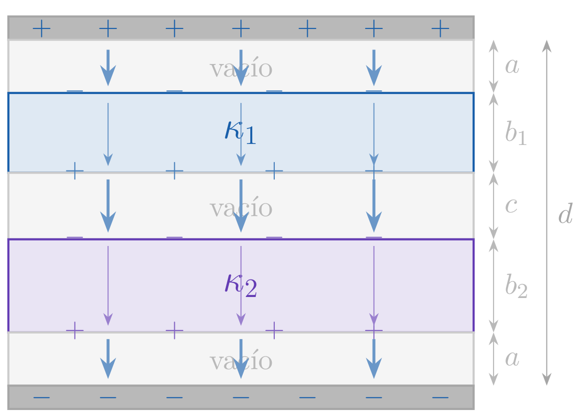
$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{a_1 + b/\kappa + a_2}}$$

Verifique que con $a_1 = a_2 = a$ se recupera el Problema 8.

---

## TAREA Problema 8B — Dos láminas separadas por vacío

Entre las placas hay **dos láminas** de dieléctrico $\kappa_1$ y $\kappa_2$ (espesores $b_1$ y $b_2$) separadas por una capa de vacío de espesor $c$, con vacío de espesor $a$ en cada extremo.



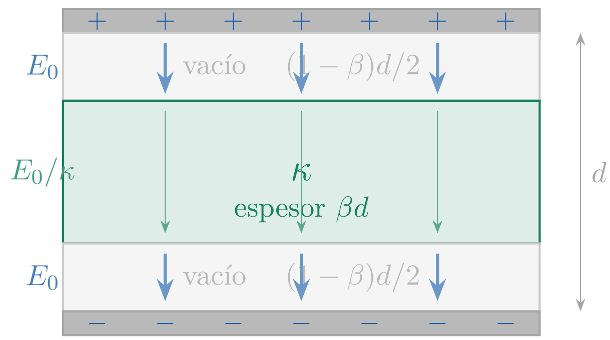

Demuestre que:

$$\boxed{\frac{1}{C} = \frac{2a + b_1/\kappa_1 + c + b_2/\kappa_2}{\varepsilon_0\, A}}$$

Verifique el límite $b_2 \to 0$ y $c \to 0$.

## TAREA Problema 8C — Capacitancia como función de $\beta = b/d$

En el Problema 8, se define $\beta = b/d \in [0, 1]$ como la **fracción de la separación** ocupada por el dieléctrico. Los gaps de vacío son $a = (1 - \beta)d/2$ cada uno.




Demuestre que:

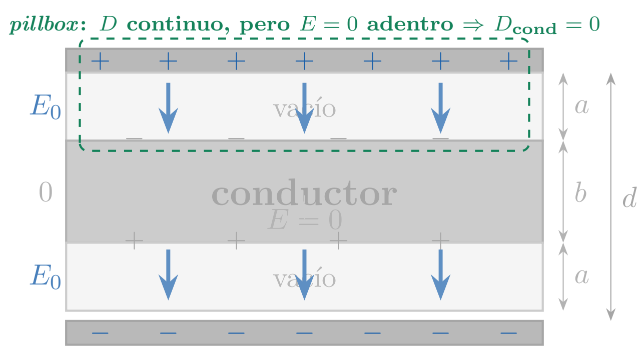
$$C(\beta) = \frac{\varepsilon_0 A}{d\left[1 - \beta\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right)\right]} = \frac{\varepsilon_0 A/d}{1 - \beta\,(1 - 1/\kappa)}$$

1. Verifique los límites $\beta = 0$ y $\beta = 1$.
2. Grafique cualitativamente $C(\beta)/C_0$ en función de $\beta$ para $\kappa = 2$, $\kappa = 5$ y $\kappa \to \infty$.
3. ¿Es la relación $C(\beta)$ lineal en $\beta$? Justifique.

---

## TAREA Problema 8D — Conductor flotante

En lugar de un dieléctrico, se introduce una **lámina conductora** de espesor $b$ centrada entre las placas. La lámina no está conectada eléctricamente a ninguna placa (*conductor flotante*).




Demuestre que:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d - b}$$

1. Interprete el resultado: ¿cuál es la "separación efectiva"?
2. ¿Qué sucede cuando $b \to d$? ¿Tiene sentido físico?
3. Compare con el caso $\kappa \to \infty$ del Problema 8. ¿Son el mismo resultado? ¿Por qué?

## Tabla resumen — todos los problemas

| # | Geometría | Condición clave (Gauss) | Resultado |
|---|---|---|---|
| **Pizarrón** | | | |
| 1 | Paralelo simétrico | $E_1 = E_2 = V/d$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(\kappa_1 + \kappa_2)$ |
| 2 | Serie simétrico | $D_1 = D_2$ | $C = \frac{2\varepsilon_0 A}{d}\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}$ |
| 3 | Serie-paralelo mixto | $E_i = V/d_i$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{4d}(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)$ |
| 4 | Lámina parcial (área) | dos *pillboxes* distintas | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2d}(1 + \kappa)$ |
| **Tarea** | | | |
| 5 | 3 capas en serie | $D_1 = D_2 = D_3$ | $\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 A}\sum \frac{d_i}{\kappa_i}$ |
| 6 | Sandwich vacío-$\kappa$-vacío | $D$ continuo $\times 2$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2a + b/\kappa}$ |
| 7 | Serie asimétrico | $D_1 = D_2$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A \kappa_1\kappa_2}{d(\alpha\kappa_2 + (1-\alpha)\kappa_1)}$ |
| 8 | 3 columnas armónicas | $E_i = V/d_i$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{3d}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\kappa_3}{3}\right)$ |
| **Variantes del prob. muestra (lámina flotante)** | | | |
| 9 | Lámina flotante centrada | dos *pillboxes* distintas | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{2a + b/\kappa}$ |
| 9A | Lámina descentrada | $D$ continuo $\times 2$ | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{a_1 + b/\kappa + a_2}$ |
| 9B | Dos láminas + vacío | $D$ continuo $\times 4$ | $\frac{1}{C} = \frac{2a + b_1/\kappa_1 + c + b_2/\kappa_2}{\varepsilon_0 A}$ |
| 9C | Fracción $\beta$ variable | misma que 9 | $C(\beta) = \frac{\varepsilon_0 A/d}{1 - \beta(1 - 1/\kappa)}$ |
| 9D | Conductor flotante | $E = 0$ adentro del conductor | $C = \frac{\varepsilon_0 A}{d - b}$ |

**Regla mnemotécnica:**

- Si las regiones comparten las **mismas placas** $\Rightarrow$ mismo $V \Rightarrow E_i = V/d_i \Rightarrow$ **capacitores en paralelo** (suman $C_i$).
- Si las regiones están **apiladas en el mismo camino** entre placas $\Rightarrow D$ continuo en interfaces $\Rightarrow$ **capacitores en serie** (suman $1/C_i$).
- Una geometría compleja se descompone en sub-regiones, cada una de las cuales es uno de los dos casos anteriores.