

De la ley de Coulomb a la ley de Gauss

Una deducción explícita con la esfera uniformemente cargada

Notas de curso

3 de septiembre de 2026

Lo que se supone. Únicamente la ley de Coulomb para una distribución continua de carga.

Lo que se obtiene. La ley de Gauss en sus dos formas,

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Lo que no se usa. Ninguna herramienta de distribuciones. No aparece la delta de Dirac en ningún paso, porque la densidad de carga es acotada en todo el espacio.

Hoja de ruta

Paso 1. Planteamiento: la ley de Coulomb integral y la notación de los vectores.

Paso 2. Simetría: el campo tiene que ser radial.

Paso 3. El campo de un cascarón esférico. *Este es el único cálculo laborioso.*

Paso 4. Suma de cascarones: el campo de la esfera completa.

Paso 5. El flujo por una esfera concéntrica: la ley de Gauss en forma integral.

Paso 6. La divergencia: la ley de Gauss en forma diferencial.

Paso 7. El teorema de la divergencia: la ley de Gauss para cualquier superficie.

Conviene notar desde ahora que el Paso 3 no depende de la distribución elegida: es el mismo para cualquier $\rho(r)$ con simetría esférica. La esfera uniforme sólo hace que el Paso 4 sea aritmética elemental.

Paso 1 Planteamiento y notación

1.1 La distribución de carga

Tomamos una esfera de radio R con carga Q distribuida uniformemente en su volumen:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 = \frac{3Q}{4\pi R^3}, & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (1)$$

Dos propiedades que usaremos sin decirlo:

- ρ es **acotada** en todo punto. No hay ninguna singularidad, ni siquiera en el origen. Todas las integrales que siguen convergen como integrales ordinarias de Riemann.
- ρ tiene **simetría esférica**: depende sólo de $r = |\mathbf{r}|$, no de la dirección.

1.2 El punto de partida

La ley de Coulomb, escrita para una distribución continua, es la única hipótesis física del argumento:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3r' \quad (2)$$

1.3 Los tres vectores

Toda la dificultad de notación de (2) está en distinguir dos posiciones que se miden *desde el mismo origen*. Fijamos ese origen O en el centro de la esfera; la elección es libre, pero fijarla desde el principio es la mitad del asunto.

Símbolo	Qué es	¿Varía en la integral?
$\mathbf{r}$	punto de observación: dónde preguntamos por el campo	no, está fijo
$\mathbf{r}'$	punto fuente: dónde está el elemento $\rho(\mathbf{r}') d^3r'$	sí, recorre la distribución
$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$	vector separación, de la fuente al observador	sí, porque $\mathbf{r}'$ varía

La prima no indica otro tipo de objeto: $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$ son posiciones en el mismo espacio. La prima sólo marca cuál de las dos se integra. Con esta notación,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\boldsymbol{\ell}}{\ell^3} d^3r' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\hat{\boldsymbol{\ell}}}{\ell^2} d^3r'. \quad (3)$$

Los dos errores frecuentes. (i) Evaluar ρ en $\mathbf{r}$ en vez de en $\mathbf{r}'$: la densidad vive donde está la carga, no donde se mide el campo. (ii) Suponer que $d\mathbf{E}$ apunta en $\hat{\mathbf{r}}$. Cada elemento produce un campo dirigido a lo largo de $\hat{\boldsymbol{\ell}}$, no de $\hat{\mathbf{r}}$; que el campo *total* salga radial es un resultado del Paso 2, no una hipótesis.

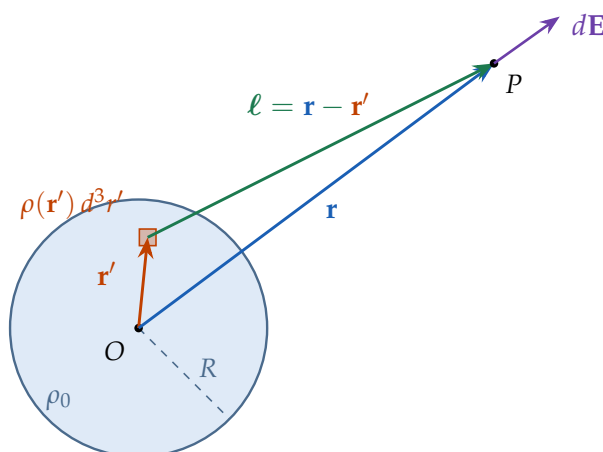


Figura 1: Geometría general de la ley de Coulomb. El punto fuente $\mathbf{r}'$ (naranja) recorre toda la distribución; el punto de observación $\mathbf{r}$ (azul) permanece fijo. El campo elemental $d\mathbf{E}$ apunta a lo largo de $\hat{\boldsymbol{\ell}}$.

Paso 2 Simetría: el campo es radial

Colocamos el punto de observación sobre el eje z , en $(0, 0, r)$. Para cada punto fuente (x', y', z') existe otro punto fuente, $(-x', -y', z')$, con la misma densidad y a la misma distancia del observador. Sus contribuciones tienen componentes x y y opuestas, y componente z idéntica. Al integrar, todo lo transversal se cancela por pares y sólo sobrevive la componente a lo largo de $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \hat{\mathbf{r}}. \quad (4)$$

La magnitud E no puede depender de la dirección, porque la distribución es invariante ante cualquier rotación en torno a O . Queda entonces una sola función escalar de una sola variable por calcular.

Paso 3 El campo de un cascarón esférico

Este es el corazón del argumento. Descomponemos la esfera en cascarones concéntricos de radio s y espesor ds , cada uno con densidad superficial

$$\sigma = \rho_0 ds.$$

3.1 Planteamiento de la integral

Con el observador en $(0, 0, r)$ y el punto fuente sobre el cascarón (Figura 2), escribimos $\mathbf{r}' = s \hat{\mathbf{r}}'(\theta', \varphi')$, de modo que

$$d^3r' = s^2 \sin \theta' ds d\theta' d\varphi', \quad \ell = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rs \cos \theta'}, \quad (5)$$

donde θ' se mide desde el eje z , es decir, desde $\mathbf{r}$. La componente z de $\ell = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ es $r - s \cos \theta'$.

La integral en φ' es trivial: todos los puntos del anillo de θ' constante (elipse punteada en la figura) están a la misma distancia ℓ del observador y contribuyen exactamente lo mismo. Da un factor 2π . Con $u = \cos \theta'$,

$$E^{\text{casc}}(r) = \frac{\sigma s^2}{2\epsilon_0} I, \quad I \equiv \int_{-1}^1 \frac{(r - su) du}{(r^2 + s^2 - 2rsu)^{3/2}}. \quad (6)$$

El problema tridimensional ha quedado reducido a una integral en una variable.

3.2 La sustitución que resuelve la integral

El cambio de variable natural es tomar como variable la propia distancia:

$$D \equiv \ell = \sqrt{r^2 + s^2 - 2rsu} \implies u = \frac{r^2 + s^2 - D^2}{2rs}, \quad du = -\frac{D dD}{rs}. \quad (7)$$

Con ello el numerador se vuelve muy simple:

$$r - su = r - \frac{r^2 + s^2 - D^2}{2r} = \frac{2r^2 - r^2 - s^2 + D^2}{2r} = \frac{r^2 - s^2 + D^2}{2r}. \quad (8)$$

Los límites se transforman geoméricamente: $u = -1$ es el punto del cascarón diametralmente opuesto al observador, a distancia $D = r + s$; $u = +1$ es el punto más cercano sobre el eje, a distancia $D = |r - s|$.

Sustituyendo (7) y (8) en (6), los factores D se cancelan y queda una integral elemental:

$$I = -\frac{1}{2r^2s} \int_{r+s}^{|r-s|} \left[\frac{r^2 - s^2}{D^2} + 1 \right] dD = -\frac{1}{2r^2s} \left[D - \frac{r^2 - s^2}{D} \right]_{r+s}^{|r-s|}. \quad (9)$$

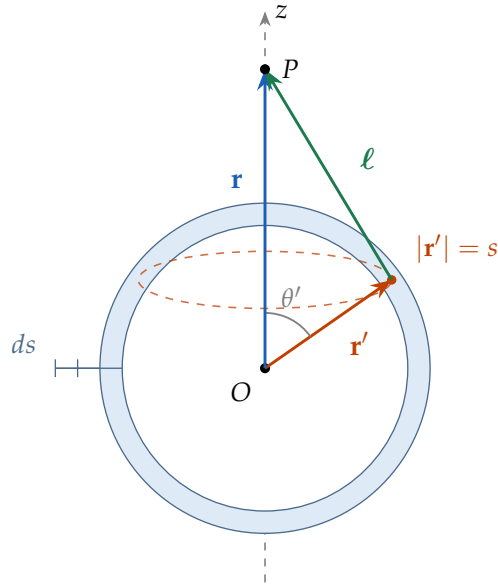


Figura 2: Geometría del cascarón, caso $r > s$. Todos los puntos del anillo punteado tienen el mismo θ' , la misma ℓ y la misma contribución: por eso la integral en φ' sólo aporta un factor 2π .

3.3 Los dos casos

Todo depende ahora de cómo se resuelva el valor absoluto, es decir, de si el observador está fuera o dentro del cascarón.

Caso A: el observador está fuera del cascarón ($r > s$, de modo que $|r - s| = r - s$).

$$\begin{aligned} [\cdot]_{D=r-s} &= (r - s) - \frac{(r - s)(r + s)}{r - s} = (r - s) - (r + s) = -2s, \\ [\cdot]_{D=r+s} &= (r + s) - \frac{(r - s)(r + s)}{r + s} = (r + s) - (r - s) = 2s, \\ I &= -\frac{1}{2r^2s}(-2s - 2s) = \frac{2}{r^2}. \end{aligned}$$

Caso B: el observador está dentro del cascarón ($r < s$, de modo que $|r - s| = s - r$).

$$\begin{aligned} [\cdot]_{D=s-r} &= (s - r) + \frac{(s - r)(s + r)}{s - r} = (s - r) + (s + r) = 2s, \\ [\cdot]_{D=r+s} &= 2s \quad (\text{igual que antes}), \\ I &= -\frac{1}{2r^2s}(2s - 2s) = 0. \end{aligned}$$

3.4 El resultado

Con $dq_{\text{casc}} = 4\pi s^2 \sigma$, la ecuación (6) da

$$E^{\text{casc}}(r) = \begin{cases} \frac{dq_{\text{casc}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > s \quad (\text{observador afuera}), \\ 0, & r < s \quad (\text{observador adentro}). \end{cases} \quad (10)$$

Un cascarón esférico uniforme actúa hacia afuera como si toda su carga estuviera concentrada en su centro, y no produce ningún campo en su interior. Todo lo que sigue es sumar.

3.5 Por qué el interior da cero: la lectura geométrica

El cero del Caso B no es una coincidencia algebraica. Considérese un cono doble estrecho con vértice en el punto interior P (Figura 3). Recorta dos parches del cascarón, a distancias ℓ_1 y ℓ_2 , con cargas dq_1 y dq_2 .

Como las áreas de los parches crecen con el cuadrado de la distancia al vértice,

$$\frac{dq_1}{\ell_1^2} = \frac{dq_2}{\ell_2^2},$$

y los campos que producen son de igual magnitud y sentidos opuestos. Cancelan exactamente. Cubriendo el cascarón con estos conos se cancela todo. El resultado depende de manera esencial de que el exponente de Coulomb sea 2: es el mismo 2 del crecimiento del área. Este es el argumento original de Newton para la gravitación.

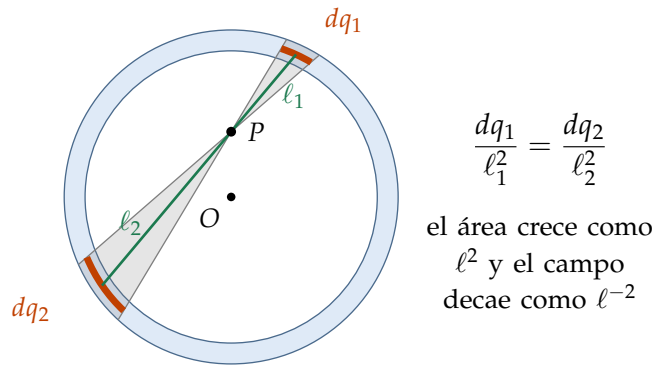


Figura 3: Por qué el campo se anula dentro de un cascarón. Los dos parches recortados por el mismo cono doble producen campos iguales y opuestos.

Paso 4 Suma de cascarones: el campo de la esfera

Ahora se integra sobre s , usando (10). La clave es que sólo los cascarones *interiores* al punto de observación contribuyen.

Fuera de la esfera ($r \geq R$). Todos los cascarones, $0 \leq s \leq R$, quedan por dentro:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^R \rho_0 4\pi s^2 ds = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (11)$$

Dentro de la esfera ($r < R$). Sólo contribuyen los cascarones con $s < r$; los que cumplen $s > r$ aportan cero *exactamente*:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int_0^r \rho_0 4\pi s^2 ds = \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (12)$$

Ambos resultados son un solo enunciado. Definiendo la carga encerrada

$$q_{\text{enc}}(r) \equiv \int_0^r \rho(s) 4\pi s^2 ds = \begin{cases} Q (r/R)^3, & r \leq R, \\ Q, & r > R, \end{cases} \quad (13)$$

se tiene, para todo r ,

$$E(r) = \frac{q_{\text{enc}}(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (14)$$

Verificaciones. (i) En $r = R$ las dos ramas coinciden en $Q/4\pi\epsilon_0 R^2$: el campo es continuo, sin salto. (ii) En $r \rightarrow 0$ el campo tiende a cero linealmente, $E \simeq \rho_0 r/3\epsilon_0$; el origen es un punto perfectamente regular. (iii) Para $r \gg R$ el campo es indistinguible del de una carga puntual Q , sin que hayamos usado nunca una carga puntual. (iv) El máximo del campo está justo en la superficie.

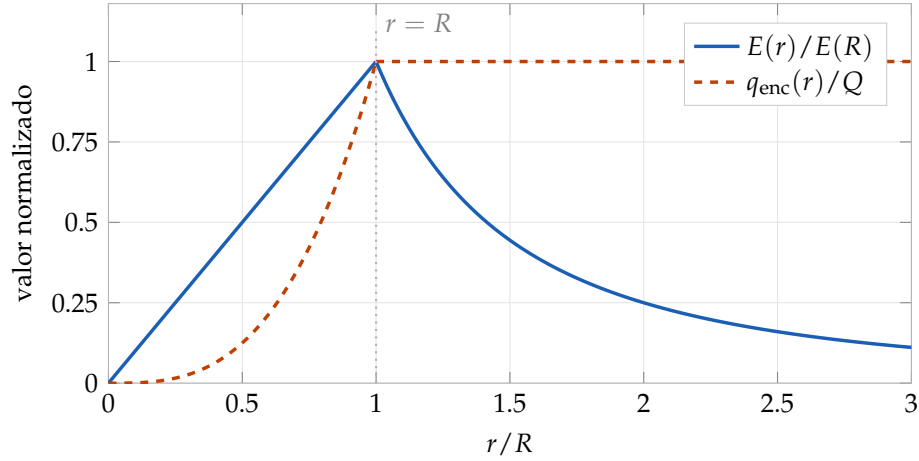


Figura 4: Campo eléctrico y carga encerrada. Dentro de la esfera E crece linealmente; fuera decae como r^{-2} . Las dos ramas empalman con continuidad en $r = R$, donde el campo alcanza su máximo. La derivada de E sí tiene un quiebre allí, porque ρ salta.

Paso 5 El flujo: ley de Gauss en forma integral

Tomamos como superficie una esfera concéntrica de radio r_0 . Sobre ella el campo tiene magnitud constante y es paralelo a $d\mathbf{A}$ en cada punto, de modo que el flujo es un simple producto:

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E(r_0) 4\pi r_0^2 = \frac{q_{\text{enc}}(r_0)}{4\pi\epsilon_0 r_0^2} \cdot 4\pi r_0^2, \quad (15)$$

es decir

$$\Phi = \frac{q_{\text{enc}}(r_0)}{\epsilon_0} \quad (16)$$

Explícitamente: para $r_0 \geq R$ el flujo vale Q/ϵ_0 y ya no crece más, por más que se agrande la superficie; para $r_0 < R$ vale $\frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 / \epsilon_0$, la carga realmente encerrada.

De dónde viene la ley de Gauss. El factor $4\pi r_0^2$ del área cancela exactamente el factor $1/r_0^2$ del campo. Esa cancelación es toda la ley de Gauss, y ocurre porque el exponente de Coulomb es precisamente 2, el mismo que el de la superficie de una esfera en tres dimensiones. Con una fuerza $\propto r^{-3}$, o en un espacio de otra dimensión, no habría ley de Gauss.

Paso 6 La divergencia: ley de Gauss en forma diferencial

Para un campo radial $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$, la divergencia en coordenadas esféricas se reduce a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E). \quad (17)$$

Dentro ($r < R$). De (12), $r^2 E = \rho_0 r^3 / 3\epsilon_0$, y por tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{3\rho_0 r^2}{3\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}.$$

Fuera ($r > R$). De (11), $r^2 E = Q/4\pi\epsilon_0$ es constante, y por tanto

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

En ambas regiones se obtiene el mismo enunciado:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (18)$$

En $r = R$ la densidad salta y la divergencia salta con ella, pero $\mathbf{E}$ sigue siendo continuo. Nada más ocurre allí: un salto finito en ρ es perfectamente admisible.

Paso 7 Cualquier superficie: el teorema de la divergencia

El Paso 5 demostró la forma integral sólo para esferas concéntricas. Pero una vez establecida la forma diferencial (18) *punto a punto*, el teorema de la divergencia devuelve la forma integral para cualquier superficie cerrada S que encierre un volumen V :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}. \quad (19)$$

Sin restricciones de forma, de tamaño ni de posición. Este es el orden lógico limpio:

Coulomb $\rightarrow$ simetría $\rightarrow$ cascarón $\rightarrow E(r) \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \rightarrow$ Gauss para toda S .

La superficie arbitraria se gana al final, y gratis, sin necesidad del argumento de ángulo sólido.

Comentario final ¿Dónde aparecería la delta de Dirac?

En ningún paso de esta deducción hizo falta el cálculo de distribuciones, y conviene ser preciso sobre por qué.

Las deltas aparecen en electrostática por dos razones muy específicas, y ninguna se presenta aquí:

1. **Una densidad que diverge:** la carga puntual. Corresponde al límite $R \rightarrow 0$ con Q fija, en el cual $\rho_0 = 3Q/4\pi R^3 \rightarrow \infty$ mientras su integral se mantiene en Q . Ahí ρ deja de ser una función y $\nabla \cdot \mathbf{E}$ hereda esa patología: $\nabla \cdot (\hat{r}/r^2) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$.
2. **Un campo que salta:** la carga superficial. Si $\mathbf{E}$ tuviera una discontinuidad al cruzar una superficie, su divergencia contendría una delta bidimensional. Aquí $\mathbf{E}$ es continuo en $r = R$; lo único que salta es ρ , y un salto de ρ sólo produce un quiebre en $E'(r)$.

Es decir: la delta es un problema del *modelo idealizado* de carga puntual, no de la ley de Gauss. Para cualquier densidad acotada —y toda distribución real lo es— la ley de Gauss es cálculo vectorial elemental.

Nota sobre otras distribuciones. El Paso 3 no usó en ningún momento la forma de ρ : el resultado (10) vale para cualquier distribución con simetría esférica. Por eso (14) es completamente general para ese tipo de simetría, y la elección de ρ sólo decide qué tan cómodo resulta evaluar $q_{\text{enc}}(r)$. Con la esfera uniforme sale un cubo; con $\rho \propto e^{-r/a}$ salen exponenciales; con una gaussiana $\rho \propto e^{-r^2/a^2}$ aparece la función error. La única ventaja de la gaussiana es que es C^∞ , y esa suavidad no se necesita para nada de lo anterior.